Lösungsvorschläge zur 8.Übung

Aufgabe 8.1: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

(i)

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; 2\lim_{a\to 0}(1^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}) \;=\; 2\,.$$

(ii) Wir betrachten zunächst nur eine kritische Stelle:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \lim_{a\to\infty} \arctan x\Big|_0^a \;=\; \lim_{a\to\infty}\arctan a \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Da es sich in der Fragestellung um eine gerade Funktion handelt, folgt:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \pi\,.$$

Aufgabe 8.2: (2 Punkte)

Mittels partieller Integration für $a \geq 1$, $f(x) = 1/x$ und $g(x) = -\cos x$:

$$\int_1^a \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Da nun das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

existiert, und $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ folgt die Existenz von

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

und damit auch die des ursprünglichen Integrals.

Aufgabe 8.3: (4 Punkte)

Hier gehört eine schöne Zeichnung hin.

Aufgabe 8.4: (je Teilaufgabe 1 Punkte)

(i) Linear unabhängig: Dies sieht man bspw. durch Subtraktion des zweiten vom ersten Vektor. Dies ergibt den Einheitsvektor $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = (0,1,0,0)^T$. Offensichtlich sind nun $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linear unabhängig.

(ii) Linear unabhängig: Dies sieht man bspw. durch Addition des zweiten mit dem ersten Vektor. Dies ergibt den Einheitsvektor $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = (0,1,0,0)^T$. Offensichtlich sind nun $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linear unabhängig.

(iii) Linear abhängig, denn $2\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{v_3}$.

Aufgabe 8.5: (2 Punkte)

Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig sind, so ist $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oder es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall folgt aufgrund der Orthogonalität:

$$0 \;=\; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \;=\; \lambda(\mathbf{v},\mathbf{v}) \;=\; \lambda\|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Also ist $\lambda = 0$, also $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, oder $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.