Lösungsvorschläge zur 6.Übung

Aufgabe 6.1: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

Erste Ableitung nach der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{1}{\sin^2\theta}(\lambda\sin^2\theta - \cos\theta(1-\lambda\cos\theta)) \\ &= \lambda\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{\lambda-\cos\theta}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(\theta) &= \frac{\sin^3\theta - (\lambda-\cos\theta)2\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta} \\ &= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{2(\cos\theta-\lambda)\cos\theta}{\sin^3\theta} \end{aligned}$$

(ii) Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimums ist $f'(\theta^*) = 0$, also nur für den Fall $\cos\theta^* = \lambda$. Da $0 \leq \lambda < 1$ folgt

$$0 < \theta^* \leq \pi\,.$$

Die zweite Ableitung ergibt $f''(\theta^*) = 1/\sin\theta > 0$ und somit liegt ein lokales Maximum vor.

(iii) Da $f'(\theta) \neq 0$ für alle anderen $\theta \in [0,\pi]$, $\theta \neq \theta^*$, kann f kein anderes Extremum besitzen. Es folgt, dass obiges lokales Minimum ein globales Minimum ist.

Aufgabe 6.2: (Teilaufgabe (a) 2 Punkte, (b) 3 Punkte)

(a)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2) \\ D_h^{(2)}f(x) &= f''(x) + \frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \qquad \xi_1,\xi_2 \in [x-h,x+h] \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

$$\begin{aligned} &(a) \quad \frac{2}{3}x^{3/2} \\ &(b) \quad \frac{8}{15}x^{3/4} \\ &(c) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$