## Lösungsvorschläge zur 11.Übung

**Aufgabe 11.1:** (je Teilaufgabe 2 Punkte)

(i) Wir entwickeln zunächst nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det A &= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2\left(\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= -2\Big((-20-1) + 2(1+20) + (-20-1) - (16-1) + 2(8+10)\Big) \\
&= -2(-21+42-21-15+36) \;=\; -42
\end{aligned}$$

(ii) Wir entwickeln zunächst nach der letzen Spalte:

$$\det A \;=\; 2\det A'_{55}$$

Und für $\det A'_{55}$ entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det A'_{55} \;=\; -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -2(-3-18) \;=\; 42$$

Damit ergibt sich $\det A = 84$.

**Aufgabe 11.2:** (7 Punkte)

(i)

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -\lambda \end{vmatrix} = -0.1\begin{vmatrix} 0.2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.9 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.9 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -0.02\begin{vmatrix} 0.9 & -\lambda \\ 0 & 0.1 \end{vmatrix} - \lambda\left((0.1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0.9 & -\lambda \end{vmatrix} - 0.2\begin{vmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.9 & -\lambda \end{vmatrix}\right) \\
&= -0.02\cdot 0.09 - \lambda\left((0.1-\lambda)\lambda^2 - 0.2(-0.2\lambda - 0.4\cdot 0.9)\right) \\
&= -0.0018 - \lambda\left(0.1\lambda^2 - \lambda^3 + 0.04\lambda + 0.072\right) \\
&= \lambda^4 - 0.1\lambda^3 - 0.04\lambda^2 - 0.072\lambda - 0.0018
\end{aligned}$$

(iii) Um nun die Eigenwerte auszurechnen muß man die Nullstellen des Polynoms 4-ten Grades bestimmen:

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^4 - 0.1\lambda^3 - 0.04\lambda^2 - 0.072\lambda - 0.0018$$

Dies ist aber analytisch nicht ohne weiteres möglich. Es sei denn, man kann unmittelbar eine Linearfaktorzerlegung ablesen:

$$p(\lambda) \quad = \quad p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$$

mit Polynomen $p_1, p_2$ vom Grad $\geq 1$. Da aber auch dies im vorliegenden Fall nicht möglich ist, benötigen wir ein Verfahren um **nichtlineare** Gleichungen zu lösen.

**Aufgabe 11.3:** (8 Punkte)

(a) Zunächst berechnen wir die Determinante:

$$\det A \quad = \quad -5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; = \; -5(-2-3) \; = \; 25$$

Nun zur Matrix $C$:

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 15 \\ 5 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Mittels einfacher Matrix-Vektor Multiplikation erhalten wir:

$$x \quad = \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 18/25 \\ 17/25 \\ 10/25 \end{pmatrix}$$