Lösungsvorschläge zur 10.Übung

Aufgabe 10.1: (je Teilaufgabe 2 Punkte)
(i) Der Rang ist 2, da sich die dritte Zeile ergibt als Summe von dem (-4)-fachen der 1. Zeile und dem 2-fachen der 2. Zeile.

(ii) Der Rang ist 3, da die Matrix regulär ist.

Aufgabe 10.2: (2 und 4 Punkte)
Offensichtlich ist (i) ein Spezialfall von (ii). Daher wollen wir gleich den allgemeinen Fall (ii) betrachten. Das LGS ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich sofort $x_n = 1/n$, sowie für $k = 1, \dots, n-1$:

$$x_k = \frac{1}{k} - \sum_{j=k+1}^{n} x_j$$

Die Summe $\sum_{j=k+1}^{n} x_j$ entspricht aber gerade der $k+1$-ten Zeile von A skalar multipliziert mit dem Vektor x, was gerade $1/(k+1)$ ergibt. Daher folgt:

$$x_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)k}$$

Insgesamt erhalten wir also die Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ 1/12 \\ \vdots \\ 1/(n(n+1)) \\ 1/n \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich nun unmittelbar die Lösung von (i):

$$x^T = (1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30, 1/6)$$

Aufgabe 10.3: (8 Punkte)
(i)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & -3 & 2 & 38 \\ 9 & 8 & -4 & 2 & 59 \\ 3/2 & 2 & -1 & 1 & 17/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & -3 & 2 & 38 \\ 0 & -1 & 0,5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 17 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & -3 & 2 & 38 \\ 0 & -1 & 0,5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -0,5 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & -3 & 2 & 38 \\ 0 & -1 & 0,5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(ii) Eine spezielle Lösung ist z.B. $x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = -2$ und $x_1 = \frac{1}{6}(38 - 6x_2) = 25/3$.

(iii) Den Kern der Abbildung bestimmt man durch Betrachtung des homogenen Systems:

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0,5 & -1 \end{pmatrix} y \;=\; 0$$

Aufgrund des Dimensionssatzes

$$n = dim(Ker(A)) + Rang(A)$$

und wegen $n = 4$ und $Rang(A) = 2$ gilt $dim(Ker(A)) = 2$. Wir haben somit zwei freie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Elemente $y \in Ker(A)$ sind dann von der Form

$$\begin{aligned} y_3 &= \alpha\,, \\ y_4 &= \beta \\ y_2 &= \frac{1}{2}y_3 - y_4 = \frac{\alpha}{2} - \beta\,, \\ y_1 &= -y_2 + \frac{3}{6}y_3 - \frac{2}{6}y_4 = -\frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{3}{6}\alpha - \frac{2}{6}\beta = \frac{2}{3}\beta \end{aligned}$$

(iv) Die allgemeine Lösung ist damit von der Form:

$$x \;=\; \begin{pmatrix} 25/3 + \frac{2}{3}\beta \\ -2 + \frac{\alpha}{2} - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$