Mathematik für Biologen 1

Malte Braack

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

WS 2005/06

January 31, 2006

Vorlesung

Allgemeines:

- Ist **kein** Schul-Unterricht (obgleich Inhalt von dort bekannt sein sollte)
- Vermittlung von viel Inhalt in wenig Zeit
- pro Vorlesungsstd. jeweils 2 h Vor-/Nachbereitung
- Vertiefung in Gruppenübungen
- Folien + Tafel, Folien im Netz (pdf) unter
  `http://numerik.uni-hd.de/~braack/bio1`

Inhalt:

- Funktionen, Stetigkeit
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme
- Grundbegriffe der Statistik

Übungen

- Teilnahmepflicht und Anwesenheitspflicht (Scheinkriterium)
- in Gruppen mit ca. 30 Personen
- Es stehen 4 Termine zur Verfügung:
  Mi 14-16, Do 14-16, Fr 10-12, Fr 11-13
- Ausgabe und Abgabe: jeweils Dienstags vor der Vorlesung
- Bearbeitung in 1-3er Gruppen
- Korrektur durch die Tutoren (Reklamationen auch dort)
- Rückgabe in den Gruppenübungen
- Ergebnis der Übungen: 20% der Endnote
- Zulassungskriterium Klausur: 50% der Punkte (=10% der Endnote)
- Mündl. Teilnahme in den Übungen wird berücksichtigt.

Klausur

- Termin: Di. 14. Februar 2006, 11:00 Uhr, INF 230, gHS
- Hier **keine** Gruppenarbeit.
- Personalausweis **und** Studentenausweis mitbringen.
- Wer gut bei den Übungen mitgearbeitet hat wird profitieren.

Literatur

1. E. Batschelet: Mathematik für Biologen, Springer Verlag, 1980.
2. H. Vogt: Grundkurs Mathematik für Biologen, Teubner, 1983.
3. A. Riede: Mathematik für Biologen.
4. H. Behncke: A. Riede: Mathematik für Biologen I, Vorlesungsskript `http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/lehre/bio04/`.

Folien im Anschluß an die jeweilige Vorlesungsstunde:

`http://numerik.uni-hd.de/~braack/bio1`

Kap. 1: Zahlen und algebraische Gesetze

- Unter den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ verstehen wir die Zahlen:

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

  Die Null ist enthalten in $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ beinhalten auch die negativen Zahlen:

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Im Gegensatz sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht notwendig ganzzahlig und können auch negativ sein: $-1.05, 2, \pi, \sqrt{2}/3, \ldots$
  Nicht alle reellen Zahlen können in Form eines endlichen, oder periodischen Dezimalbruchs dargestellt werden (z.B. π).
- Offene Intervalle werden mit (a, b) bezeichnet, abgeschlossene mit $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Algebraische Gesetze

- Multiplikation vor Addition, anderenfalls benutzt man Klammern:

$$ab + c = (ab) + c \neq a(b + c) \qquad \text{(i.a.)}$$

- Kommutative Gesetze: Die Reihenfolge zwei Zahlen zu addieren oder zu multiplizieren, kann vertauscht werden:

$$a + b = b + c \qquad \text{sowie} \qquad ab = ba$$

- Assoziative Gesetze: Addiert oder multipliziert man mehr als zwei Zahlen, so ist das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge (von der Klammerung):

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{sowie} \quad abc = a(bc) = (ab)c$$

- Distributives Gesetz: Addition und Multiplikation sind hierdurch verbunden:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Gleichungen und Ungleichungen

- Bei der Auflösung von Gleichungen muss sichergestellt werden, nicht durch **Null** zu teilen:
  Bsp.: $x^2 = px$ ergibt $x(x-p) = 0$, also $x = 0$ oder $x = p$.
- Relationen $<, \leq, >, \geq$.
  Bsp: Diabetes, wenn die Konzentration von Glucose c im Blut eine Stunde nach Aufnahme von $50\,g$ Glucose den Wert von 1.8 g/l übersteigt:

$$c > 1.8 g/l$$

- Bei der Umformung von Ungleichungen muss bei der Multiplikation mit negativen Zahlen, das Ungleichheitszeichen "umgedreht" werden: z.B. für $a > 0$:

$$-ab + c > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b < \frac{c-1}{a}$$

Mittelwerte

- Bei Versuchsreihen ist der arithmetische Mittelwert von zentraler Bedeutung:

$$\overline{x} \quad = \quad \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \; = \; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Die Summe der Abweichungen vom Mittelwert ist Null:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \quad = \quad 0$$

- Gilt nicht für die Absolutbeträge (arithmetisches Mittel der Abweichungen):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$$

- Ein häufigeres Streuungsmaß ist allerdings die Varianz, d.h. die mittlere quadratische Abweichung:

$$Var(x) \; = \; \sigma^2 \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- $\sigma = \sqrt{Var(x)}$ wird Standardabweichung genannt.

Beispiel

Alkoholgehalt bei einer Strassenkontrolle (in Promille)

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
0.	–0.464	0.215296
0.32	–0.144	0.020736
0.62	0.156	0.024336
1.2	0.736	0.541696
0.18	–0.284	0.080656
2.32	0	0.882720

Arithmetisches Mittel:

$$\overline{x} = \frac{2.32}{5} = 0.464$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{0.88272}{5} = 0.176544$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = 0.42$$

Potenzen

- Potenzen mit ganzzahligen Vielfachen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}, \qquad a^{-n} = 1/a^n \qquad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

- Besonderheiten: $a^0 = 1$ für $a \neq 0$.
- Rechnen mit Potenzen: $a^{n+m} = a^n a^m$ und $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- Schreibweisen für z.B. 36 000 km:

$$3.6 \times 10^4 km \quad \text{oder} \quad 3.6 \times 10^7 m \quad (3.6e7 \text{ per Computer})$$

- Bei Addition zuvor in gleiche Einheiten bringen:

$$36\, km + 6500\, m = 36\, km + 6.5\, km = 42.5\, km$$

- Potenzen mit Brüchen als Exponent:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

zB.: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ und $40000^{1/2} = 200$.
- m–te Wurzeln:

$$b = \sqrt[m]{a} \iff b^m = a \qquad (m \in \mathbb{N})$$

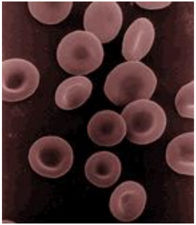
Größenordnungen

- Vorsilben für Potenzen:

Symbol	Vorsilben	Faktor	
T	tera-	1 000 000 000 000	10^{12}
G	giga-	1 000 000 000	10^{9}
M	mega-	1 000 000	10^{6}
k	kilo-	1 000	10^{3}
m	milli-	0.001	10^{-3}
μ	mikro-	0.000 001	10^{-6}
n	nano-	0.000 000 001	10^{-9}
p	pico-	0.000 000 000 001	10^{-12}

- Man sagt, dass zwei Zahlen "von der gleichen Größenordnung" sind, wenn sie sich um maximal den Faktor 10 unterscheiden.
- Beispiel: Das Vogelgrippenvirus H1N1 hat ein Gewicht von $0.0043\,pg$. Um wieviele Größenordnung unterscheidet es sich damit von einem einzelnen Sauerstoffmolekül ?
  $4.3 \cdot 10^{-15} g : 5 \cdot 10^{-23} g \approx 10^{8}$

Beispiel Erythrozyten



- Dicke 1-2 μm,
- Durchmesser 7-8 μm,
- Anzahl 5.4×10^6 pro m^3 Blut (Mann) bzw. 5.0×10^6 bei Frauen,
- Blutmenge 5-6 l

Wie groß ist die Gesamtoberfläche ?

- **Ansatz:** Zylinder mit Durchmesser $d = 7.5 \times 10^{-6} m$, Höhe $h = 1.5 \times 10^{-6} m$.
- Oberfläche pro Blutzelle:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Seitenfläche} \\ &= 2(d/2)^2\pi + \pi hd = 1.237 \times 10^{-10} m^2 \end{aligned}$$

- Anzahl:

$$N = \text{Blutvol.} \cdot \frac{\text{Anzahl}}{mm^3} = 5.5 \times 10^6 mm^3 \cdot \frac{5.4 \times 10^6}{mm^3} = 2.97 \times 10^{13}$$

- Gesamtoberfläche:

$$F \cdot N = 1.237 \times 10^{-10} m^2 \cdot 2.97 \times 10^{13} = 3674\, m^2 \approx (60\, m)^2$$

Signifikante Stellen

In der Praxis haben wir es häufig mit fehlerbehafteten Größen zu tun:

- Weiß man beispielsweise, dass bei der Messung der Länge $35.27\,km$ der maximale Fehler $0.005\,km$ beträgt, so spricht man von vier signifikanten Stellen.
- Die signifikanten Stellen sind unabhängig von der Einheit, bzw. vom Komma: $35.27 km = 35\,270\,m$ hat jeweils vier signifikanten Stellen.
- Insofern ist die Darstellung $3.527 \times 10^4\,m$ sinnvoll und kann andere (weniger) Informationen beinhalten als $3.5270 \times 10^4\,m$.
- Ergibt eine Messung den Wert $35.278\,872\,mm$ bei einer maximalen Genauigkeit von $5\,\mu m$ ist $3.5279 \times 10^{-2}\,m$ eine geeignete Darstellung.

Rundungsfehler

- Auslöschung: Bei Subtraktion gleich großer Zahlen können signifikante Stellen verloren gehen. Bsp: $6.413\,m - 6.412\,m = 1 \times 10^{-3} m = 1\,mm$.
- Multiplikation und Division überträgt die (minimale) Genauigkeit auf das Endergebnis. Bsp.: $14.04 \cdot 2.3/39.7 = 0.813$ hat die Genauigkeit der Zahl 2.3, also ist 0.81 eine geeignete Darstellung.
- Das arithmetische Mittel kann eine höhere Genauigkeit besitzen als die Einzelwerte:

$$5.8 \quad 6.1 \quad 5.7 \quad 5.6 \quad 6.2 \quad 5.8 \quad 5.9 \quad 6.2 \quad 6.0 \quad 5.9$$

  ergibt $\overline{x} = 5.92$.

Kap. 2: Funktionen

Definition: Unter einer Funktion (oder auch Abbildung) $f : D \to Z$ versteht man die Zuordnung eines jeden Elementes aus dem Definitionsbereich D auf jeweils ein Element aus der Zielmenge Z.

- Gilt $f(x) = z$, so heisst x Urbild von z, und z heisst Bild von x.
- Die Menge aller Elemente aus Z, die ein Urbild in D besitzen, heisst Wertebereich (oder ebenfalls Bild) $f(D) \subset Z$. Ist also z im Wertebereich von f, so ist die Gleichung

  $$f(x) \quad = \quad z$$

  durch mindestens ein $x \in D$ erfüllt.

Funktionen (Forts.)

Zur genauen (expliziten) Definition einer Funktion benötigt man sowohl

- den Definitionsbereich, der angibt auf welche Werte von x die Funktion angewendet werden soll, und
- die Funktionsvorschrift, die bestimmt wie man den Funktionswert $f(x)$ aus x erhält.

Häufig wird ein sinnvoller Definitionsbereich mitgeliefert:

Beispiel: Das Volumen eines Zylinders bestimmt sich aus dem Radius:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Hier mag der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ sinnvoll sein.

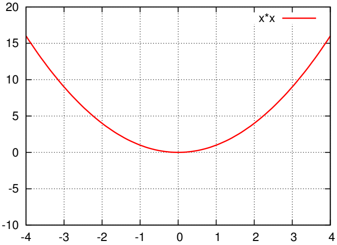
Funktionen können auch abschnittsweise definiert sein, z.B.:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Darstellung von Funktionen

Im folgenden nehmen wir an, dass der Definitionsbereich aus reellen Zahlen besteht, also $D \subset \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : D \to Z$ wird häufig durch seinen Graphen dargestellt. Dies ist (formal) die Menge aller Tupel / Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in D$. Der Graph von f ist eine Teilmenge des Produktraums $D \times Z$.



Lineare Funktionen

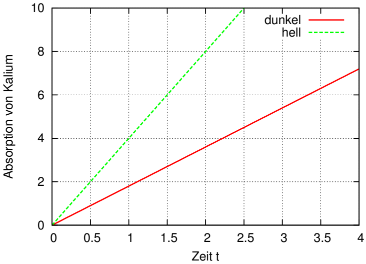
- Eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$f(x) \quad = \quad ax + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

- a heißt Steigung von f.
- Ist $x = t$ die Zeit, so werden gewisse Wachstumsprozeße durch lineare Funktionen beschrieben.
- Beispiel: Absorption von Kalium bei Mais.

Wachstumsrate:

$$a = \begin{cases} 1.8\,\frac{\mu mol}{h\,GE} & \text{(dunkel)} \\ 4.0\,\frac{\mu mol}{h\,GE} & \text{(hell)} \end{cases}$$



Bestimmung linearer Funktionen

Beispiel: Photochem. Reaktion bei Rohrkolben ist bei weniger Frost wirksamer.
Annahme: linearer Zusammenhang mit Unbekannten a, b:

$$f(x) = ax + b \qquad (x = \text{Anzahl Frosttage})$$

und bekannten Messungen der Hill-Aktivität $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

Frage: Wie erhält man a, b?

- Diese Koeffizienten lassen sich eindeutig durch die Messungen zu zwei unterschiedlichen Stellen x_1 und x_2 bestimmen:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

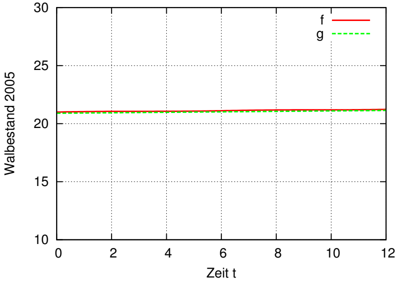
- sowie anschließendem Einsetzen und Umformen:

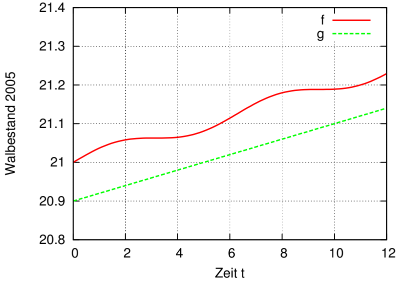
$$f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$$

Hier: $x_1 = 100$ Tage, $x_2 = 300$ Tage, $y_1 = 42$ HE (Hill-Einheiten), $y_2 = 21$ HE.
$\Longrightarrow a = -21/200$ HE/Tag, $b = 42HE + 21\,HE/2 = 52.5\,HE$.

- Selbst bei einer **linearen** Skalierung der Achsen, können unterschiedliche Sachverhalte suggeriert werden.
- Hier wird der gleiche funktionale Zusammenhang dargestellt:

$$\begin{aligned} f(t) &= 21 + \frac{1}{50}t + \frac{1}{50}\sin(t) \quad \text{(nicht mehr linear)} \\ g(t) &= 20.9 + \frac{1}{50}t \quad \text{(linear)} \end{aligned}$$





Polynome

- Unter einem Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ versteht man eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \; = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,,$$

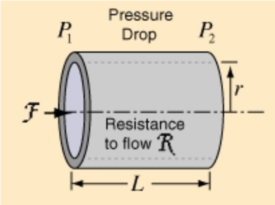
  mit reellen Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.
- Fall $n = 0$: sind dies die konstanten Funktionen $p(x) \equiv c$.
- Fall $n = 1$: sind dies die linearen Funktionen $p(x) = ax + b$.
- Fall $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$: Monome oder Potenzfunktionen $p(x) = ax^n$.
  Beispiel eines einzelliges Lebewesens kugelförmiger Gestalt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Oberfläche} & S(r) & = & 4\pi r^2 \\ \text{Volumen} & V(r) & = & \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array}$$

  Verdopplung des Radiuses r führt auf ein Ver-4-fachung der Oberfläche und einer Ver-8-fachung des Volumens.
- Stoffwechsel in der Biologie: Verhältnis $S(r) : V(r)$ ist wichtig $\Rightarrow r_1 \leq r \leq r_2$.

Poiseuille[1] Strömung in Blutgefäßen

- Parabolisches Geschwindigkeitsprofil in laminarer Strömung:



$$v(r) \;=\; \frac{a}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

μ =Viskosität,
R =Gefäßradius,
$a = (P_1 - P_2)/L$ =rel. Druckdifferenz

- Maximale Strömungsgeschwindigkeit für $P_1 - P_2 = 400\,Pa$, $L = 2\,cm$, $R = 8 \cdot 10^{-5} m$ und $\mu = 2.7 \cdot 10^{-3} Pa\,s$:

$$\max_{-R \leq r \leq R} v(r) = v(0) \;=\; \frac{a}{4\mu} R^2 \approx 1.185 \frac{cm}{s}$$

[1] J.L. Poiseuille (1799-1869), franz. Physiologe und Arzt.

Lösungen quadratischer Gleichungen

- Das Lösen einer quadratischer Gleichungen entspricht dem Finden von Nullstellen einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad = \quad 0 \quad \text{mit } a \neq 0$$

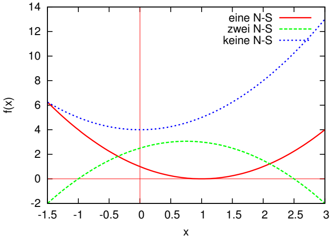
- Es gibt maximal zwei Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- Es genügt Nullstellen zu $a = 1$ zu betrachten:

$$g(x) \quad = \quad x^2 + px + q\,, \qquad (p = b/a,\ q = c/a)$$

- "$p - q -$" Formel:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad = \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \quad = \quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



sofern $p^2 - 4q \geq 0$.

- Im Fall $p^2 - 4q = 0$, nur eine NS.
- Im Fall $p^2 - 4q < 0$, keine reellen Lösungen.

Beschränkte Funktionen

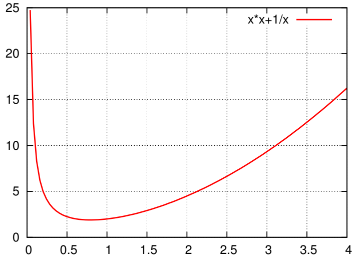
- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq M$ für alle $x \in D$.
- Entsprechend heißt sie nach unten beschränkt, wenn $f(x) \geq m$ für alle $x \in D$ für ein $m \in \mathbb{R}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
- M heißt dann obere Schranke und m heißt untere Schranke. Diese sind niemals eindeutig.

Beispiel:

$D = \mathbb{R}^+$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Eine untere Schranke ist offenbar $m = 0$, aber ebenso $m = 1$.



Schranken

- Eine obere Schranke M der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt kleinste obere Schranke, wenn für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ die Zahl $M - \epsilon$ keine obere Schranke von f ist.
- Entsprechend ist eine untere Schranke m eine größte untere Schranke, wenn für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ die Zahl $m + \epsilon$ keine untere Schranke von f ist.
- Es kann der Fall eintreten, dass der Wert der kleinsten obere Schranke angenommen wird, als auch nicht.

Beispiele:

- Im Fall $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$ ist $m = -1$ größte untere Schranke von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieser Wert wird für $x = 0$ sogar angenommen.
- Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x^{-2}$ ist $M = 2$ kleinste obere Schranke, obgleich $f(x) < M$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

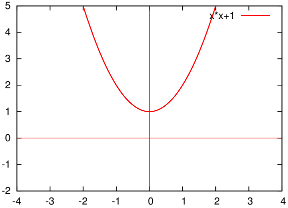
Symmetrische Funktionen

Wir wollen annehmen, dass der D ein offenes oder ein abgeschlossenes Intervall der Form $D = (-a, a)$ bzw. $D = [-a, a]$ mit $a > 0$, oder $D = \mathbb{R}$ ist.

- f heißt gerade, wenn für alle $x \in D$ gilt:

  $$f(-x) = f(x).$$

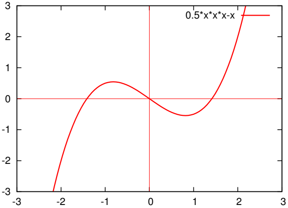
  In diesem Fall ist der Graph von f achsensymmetrisch zur $y-$Achse.



- f heißt ungerade, wenn für alle $x \in D$ gilt:

  $$f(-x) = -f(x).$$

  In diesem Fall ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.



- Die Untersuchung von Symmetrieeigenschaften kann u.U. die Untersuchung einer Funktion vereinfachen, zB. ist a Nullstelle einer ungeraden oder einer geraden Funktion, so ist auch $-a$ Nullstelle.

Beispiele symmetrischer Funktionen

- Potenzfunktionen (Monome) mit geradem Grad $n = 2m \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ sind gerade:

$$f(-x) \quad = \quad (-x)^{2m} = ((-x)^2)^m = (x^2)^m = x^{2m} = f(x)$$

- Potenzfunktionen (Monome) mit ungeradem Grad $n = 2m + 1 \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ sind ungerade:

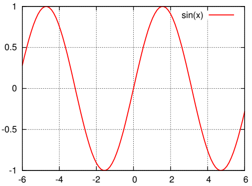
$$f(-x) \quad = \quad (-x)^{2m+1} = (-x)^{2m}(-x) = x^{2m}(-x) = -x^{2m+1} = -f(x)$$

Periodische Funktionen

- Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn ein $p > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + p) \quad = \quad f(x)$$

- Die kleinste positive Zahl $p > 0$, für die dies gilt heißt Periode.
- **Beispiel:** trigonometrische Funktionen mit der Periode $p = 2\pi$:



- Man überlege sich, dass auch für eine periodische Funktion f mit Periode p auch gilt: $f(x - p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Von einer Peride $p = 0$ zu sprechen, ist nicht sinnvoll.

Monotonie

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (oder monoton steigend), wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) \quad \le \quad f(y).$$

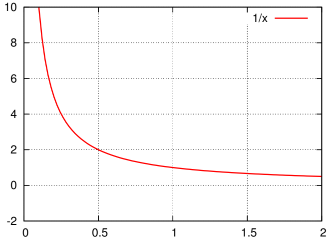
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton fallend, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) \quad \ge \quad f(y).$$

- Gelten in obigen Definitionen statt "$\le$" bzw. "$\ge$" sogar "$<$" bzw. "$>$", dann heißt f sogar streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ ist streng monoton fallend.
- $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist streng monoton wachsend für $D = \mathbb{R}^+$, und streng monoton fallend für $D = \mathbb{R}^-$.



Abbildungs-Eigenschaften von Funktionen

- $f : D \to Z$ heisst injektiv, wenn jedes Element aus dem Wertebereich, $z \in f(D)$, genau ein Urbild $x \in D$ besitzt.
- $f : D \to Z$ heisst surjektiv, wenn $Z = f(D)$ gilt.
- Ist $f : D \to Z$ injektiv und surjektiv, so ist diese Funktion bijektiv.

Beispiele:

- Nichtkonstante lineare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit Steigung $a \neq 0$) sind bijektiv.
- Bijektive Funktionen sind umkehrbar, d.h. es gibt eine Funktion $f^{-1} : Z \to D$, so dass $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$.

Kap. 3: Folgen

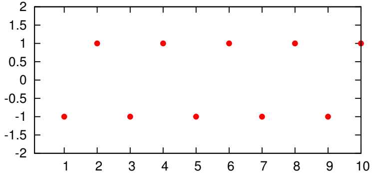
- Eine Folge
$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \subset \quad Z$$
ist im Grunde eine Funktion $a : \mathbb{N} \to Z$, mit $a(n) = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Die Zahl n bezeichnet man in dieser Schreibweise als Index von a, während a_n das $n-$te Glied der Folge ist.
- Die zuvor eingeführten Bezeichnungen der Monotonie, Beschränktheit und Peridozität übertragen sich sinngemäß von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Wir bezeichnen solch eine Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder auch kurz (a_n).

Beispiele von Folgen

- Die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$a_n = (-1)^n$$

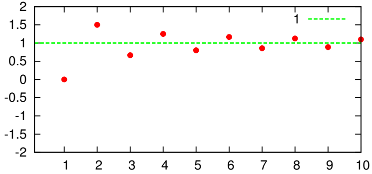
  nimmt wechselweise die Werte -1 und 1 an. Diese Folge ist somit periodisch.



- Dies führt bei der Folge $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$$

  dazu, dass ausgehend vom Wert $+1$ der Ausdruck $1/n$ abwechselnd addiert und subtrahiert wird.



Konvergente Folgen

Definition: Eine Folge reeller Zahlen (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem (noch so kleinem) $\epsilon > 0$ stets ein (von ϵ abhängiges) $N = N(\epsilon)$ existiert, mit der Eigenschaft:

$$|a_n - a| \quad < \quad \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert (oder Limes) der Folge (a_n). Man schreibt:

$$a \quad = \quad \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \to a$$

Anderenfalls heißt die Folge divergent.

Definition: (a_n) heißt bestimmt divergent gegen ∞ (gegen $-\infty$), wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}$ stets ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n \quad \geq \quad K \quad \forall n \geq N \qquad (a_n \leq K)$$

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).
Diese Folgen sind also notwendigerweise unbeschränkt.

Beispiele von Folgen

- Die Folge (a_n) mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen ∞.
- Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ divergiert, aber nicht bestimmt gegen $\pm\infty$.
- Die Folge (a_n) mit $a_n = -2^n$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.
- Ist (a_n) eine Nullfolge positiver Zahlen, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

so divergiert die Folge $(1/a_n)$ bestimmt gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

- Umkehrung: Gilt $\lim a_n = \infty$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so: $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

Achtung: Mit dem Symbol ∞ kann man nicht rechnen wie mit reellen Zahlen. Beispielsweise ist der Ausdruck $\infty + 1 = \infty$ gefährlich, da man folgern könnte $1 = 0$.

Eigenschaften konvergenter Folge

- Linearkombinationen von konvergenten Folgen $(a_n), (b_n)$ sind wieder konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty}(a_n) + \mu \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

- Ein Produkt zweier konvergenten Folgen $(a_n), (b_n)$ ist wieder konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

- Das Produkt einer Nullfolge (a_n) mit einer beschränkten Folge (b_n) ist wieder eine Nullfolge.
- **Achtung:** Die Umkehrungen obiger Aussagen gilt i.a. nicht, z.B.:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\,,\ b_n = n \quad \text{aber } a_n b_n = \frac{1}{n} \to 0\,.$$

- Es genügt Nullfolgen zu verstehen, denn es sind äquivalent:

$$\begin{aligned} (i) \qquad & \lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \\ (ii) \qquad & \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0\,, \quad \text{d.h. } (b_n) \text{ ist Nullfolge mit } b_n = a_n - a. \end{aligned}$$

Fibonacci Folge

- Szenario:
  - Erwachsene Hasen bringen jeden Monat ein Paar Junge auf die Welt.
  - Junge werden in 2 Monaten erwachsen.
  - Entwicklung bei anfänglich einem Paar: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$
- Diese Folge ist **rekursiv** definiert (Fibonacci Folge):

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

- Wird zukünftig eine stabile Wachstumsrate erreicht ?

$$b_n \quad = \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \longrightarrow b\,? \quad (n \to \infty)$$

- Es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$$

- Somit müsste gelten $b = 1 + \frac{1}{b} \geq 1$, bzw.

$$b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618\ldots$$

- Achtung: Es ist hiermit noch nicht gezeigt, dass (b_n) gegen b konvergiert.

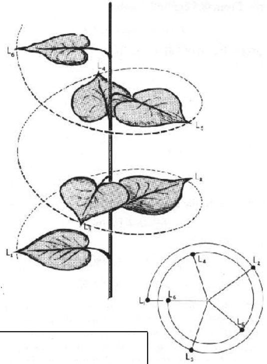
Fibonacci Zahlen in der Biologie

- Schraubenlinienförmige Anordnung von Blättern mit Divergenzwinkel $0 < \theta \leq 360^o$.
- Periode n und m Umläufe, wenn:

$$n\theta = 360^o m$$

z.B: $\theta = 144^o$, $n = 5$, $m = 2$.

- Die Fibonacci Zahlen $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ sind die häufigsten anzutreffensten Werte für m und n.



m	n	
1	2	einige Zwiebelpflanzen
1	3	Erle, Birke
2	5	Weiden, Rosen, Steinobst
3	8	Kohl, Astern, Habichtskraut
5	13	Nadeln von Nadelhölzer
8	21	Schuppen von Fichte- und Tannenzapfen
13	34	Schuppen von Pinienzapfen

Diskretes logistisches Wachstumsgesetz

- Populationsanzahl zur Zeit t_n:

$$a_n \quad = \quad a_{n-1}(1 + g - s) - b a_{n-1}^2$$

Geburtenrate g, Sterberate s, Wettbewerbseffekt b.

- Existiert eine stabile, konstante Populationsanzahl ?

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad = \quad ?$$

Cauchy Kriterium

Das Cauchy Kriterium besagt, dass eine Folge reeller Zahlen (a_n) genau dann konvergent ist, wenn für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ stets ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass:

$$|a_n - a_m| \quad \leq \quad \epsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N\,.$$

- Offensichtlich wird für dieses Kriterium der Limes der Folge <u>nicht</u> benötigt.
- Beispiel: Wähle für die Folge $a_n = 1/n$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m \geq n$:

$$|a_n - a_m| \quad = \quad \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n} \leq \epsilon$$

für $m \geq n \geq N := 2/\epsilon$.

Reihen

- Ist (a_n), $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge reeller Zahlen, so heißt

$$s_n \;=\; a_0 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

  $n-$te Partialsumme dieser Folge.
- Die Folge der (s_n) bilden eine sogenannte Reihe.
- Konvergiert diese Folge (s_n) so wird der Grenzwert bezeichnet mit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{n\to\infty} s_n$$

Wettrennen von Fuchs und Hase

Problem:

- Wettrennen zwischen Fuchs (10 m/s) und Hase (5 m/s).
- Der Hase bekommt einen Vorsprung von 10 m.
- Kann der Fuchs den Hasen einholen ?
  - Fuchs holt den Vorsprung von 10 m auf, Hase läuft 5 m weiter,
  - Fuchs holt den Vorsprung von 5 m auf, Hase läuft 2.5 m weiter,
  - ...
  - Behält der Hase nicht immer einen Vorsprung ?

Lösung: Obiges Problem führt auf folgende konvergente Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Diese Summe heißt geometrische Reihe.

Geometrische Reihen

- Mit eine reelle Zahl $x \neq 1$ gilt für die endliche geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \quad = \quad \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

- Ist $|x| < 1$, so gilt für die unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad = \quad \frac{1}{1 - x}$$

denn:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \longrightarrow \quad \frac{1 - 0}{1 - x} \qquad (n \to \infty)$$

Zinses-Zins Rechnung

- Man zahle jährlich (jeweils zum 1.1) einen Betrag x auf ein Konto ein, dass mit einem Zinsfuß von p % verzinst wird. Wie hoch sind die Ersparnisse nach n Jahren ?

$$\begin{array}{ll}
1.\ \text{Jahr:} & K_1 = xq \qquad \text{mit } q = 1 + p/100 \\
2.\ \text{Jahr:} & K_2 = (K_1 + x)q = x(q^2 + q) \\
3.\ \text{Jahr:} & K_3 = (K_2 + x)q = x(q^3 + q^2 + q) \\
\quad \ldots & \\
n.\ \text{Jahr:} & K_n = x \sum_{k=1}^{n} q^k = x \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}
\end{array}$$

- Wenn man anschliessend jährlich den Betrag y abhebt (Rente):

$$\begin{array}{ll}
n+1.\ \text{Jahr:} & K_{n+1} = (K_n - y)q \\
n+2.\ \text{Jahr:} & K_{n+2} = (K_{n+1} - y)q = K_n q^2 - yq^2 - yq \\
\quad \ldots & \\
n+m.\ \text{Jahr:} & K_{n+m} = (K_{n+m-1} - y)q = K_n q^m - y \frac{q^{m+1} - q}{q - 1}
\end{array}$$

- Wie lange hält das Kapital ?

Harmonische Reihen

- Nicht für jede Nullfolge (a_n) ist die zugehörige Reihe beschränkt.
- Beispiel: $a_k = \frac{1}{k}$ bildet eine Nullfolge, aber die harmonische Reihe divergiert gegen ∞:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;=\; \infty$$

Dies sieht man durch geschicktes Zusammenfassen:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

- Allerdings konvergiert für jedes $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$$

Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen

Unmittelbare Anwendung des Cauchy Kriteriums auf Reihen ergibt:

Satz: Eine Reihe $\sum_k a_k$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ stets ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \quad \leq \quad \epsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N\,.$$

Folgerungen:

- Eine **notwendige Bedingung** für die Konvergenz der Reihe ist, dass (a_n) eine Nullfolge ist.
- Diese Bedingung ist allerdings **nicht hinreichend**, d.h. es gibt divergente Reihen die aus Nullfolgen (a_n) gebildet sind (z.B. harmonische Reihe mit Exponent m=1).

Majorantenkriterium Reihen

Sei (c_n) eine Nullfolge nicht-negativer reeller Zahlen, so dass die zugehörige Reihe konvergiert, also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. Ferner sei die Folge (a_n) durch (c_n) majorisiert, d.h: $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \,.$$

Beispiel: Man weisst leicht durch vollständige Induktion nach, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \,.$$

Damit folgt die Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Folglich folgt für $m \geq 2$ auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^m} < \infty$$

wegen $k^m \geq k(k+1)/2$.

Quotientenkriterium für Reihen

- Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn ein $0 < a < 1$ existiert, so dass für **fast alle** $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad < \quad a.$$

- "fast alle" bedeutet: alle bis auf endlich viele, also für alle $n \geq N$ mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$.
- Die harmonische Reihe erfüllt das Quotientenkriterium nicht.
- Auch das Quotientenkriterium ist nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad < \quad \infty$$

Wurzelkriterium für Reihen

- Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn ein $0 < a < 1$ existiert, so dass für **fast alle** $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n|^{1/n} \quad < \quad a.$$

- Beispiel: Für $|x| < 1$, $a_n = x^n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad < \quad \infty\,, \quad \text{da } |a_n|^{1/n} = |x| < 1$$

Kap. 4: Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x \in D$, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.

Ist f an jeder Stelle $x \in D$ stetig, so heißt f stetig (auf ganz D).

Anschaulich bedeutet dies (in einer Dimension), dass sich der Graph der Funktion f in einer kleinen Umgebung von x in einem Zug durchzeichnen läßt. Diese Interpretation ist anschaulich gerechtfertigt aber mathematisch nicht exakt genug.

Grenzwertbildung bei Funktionen

- Bisher hatten wir für natürlichen Zahlen n Ausdrücke der Form

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

- Nun betrachten wir auch Ausdrücke der Form $\lim_{x \to a} f(x)$, definiert durch

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} f(a_n)$$

  mit einer Folge $(x_n) \to a$. Hierbei kann $a \in \mathbb{R}$ oder sogar $a = \infty$ oder $a = -\infty$ sein.

- Entsprechend ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad = \quad f(a)$$

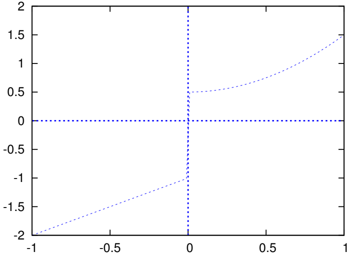
- Konvergente Folgen $(x_n) \to x$, bleiben unter stetigen Funktionen also konvergent, sofern der Grenzwert x im Definitionsbereich der Funktion liegt.

Beispiele unstetiger Funktionen

- Treppenfunktionen sind unstetig an den Sprungstellen.
- $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \le 0 \\ \frac{1}{2} + x^2 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist unstetig im Nullpunkt $x = 0$. An allen anderen Stellen ist f stetig.



Nachweis: $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim a_n = 0$, aber:

$$f(a_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \, < \, \epsilon$$

.

Beispiel: (a) Die Betragsfunktion $x \to |x|$ ist stetig. Im Nullpunkt $x_0 = 0$ gilt beispielsweise mit $\epsilon = \delta$:

$$|x - x_0| = |x| < \delta \quad \Longrightarrow ||x| - |x_0|| = |x| < \epsilon$$

(b) Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^3, & \text{wenn } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist ebenfalls im Nullpunkt $x_0 = 0$ stetig, denn für $|x - x_0| < \delta \leq 1$:

$$|f(x) - f(0)| \quad = \quad |f(x)| \, \leq \, x^2 \, < \, \delta^2$$

Die Wahl $\epsilon = \delta^2$ leistet also das Gewünschte.

Beispiele stetiger Funktionen

- Polynome sind stetig in ganz $\mathbb{R}$.
- Wichtig bei der Definition ist, dass nur Punkte $x \in D$ betrachtet werden. Dies scheint zwar selbstverständlich, kann aber in die Irre führen. Beispielsweise ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad x \to \frac{1}{x}$$

  stetig auf $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, denn sie verhält sich an jedem Punkt $x \neq 0$ vollkommen "harmlos".
- Jede **Fortsetzung** von $f(x) = 1/x$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist unstetig im Nullpunkt.
- Rationale Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \quad = \quad \frac{p(x)}{q(x)}\,, \quad (p, q = \text{Polynome})$$

  sind auf $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ stetig.
- Summen und Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig.

Stetigkeit bei der Komposition von Funktionen

- Gegeben zwei Funktionen

$$
\begin{aligned}
f : D \to \mathbb{R}\,, &\quad x \to y \\
g : E \to \mathbb{R}\,, &\quad y \to z \qquad \text{mit } f(D) \subset E
\end{aligned}
$$

- Komposition / "Nacheinander-Ausführung" von Funktionen

$$
\begin{aligned}
g \circ f : D \to \mathbb{R}\,, &\quad x \to z \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x))
\end{aligned}
$$

- Ist f im Punkt $a \in D$ stetig, und g im Punkt $f(a)$ stetig, so ist auch diese Komposition stetig im Punkt a.
- Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Dann ist

$$
(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|
$$

stetig in ganz $\mathbb{R}$.

Ein “pathologisches” Beispiel

Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist im Nullpunkt unstetig, obgleich es folgende Folgen gibt:

- $a_n < 0$, $\lim a_n = 0$, $f(a_n) \to f(0)$
- $b_n > 0$, $\lim b_n = 0$, $f(b_n) \to f(0)$

Begründung: Es gibt eben auch eine andere Folge (c_n) mit $\lim c_n = 0$ und $\lim f(c_n) \neq f(0)$.

Anwendungsbeispiel

- Eine Person nehme täglich eine konstante Dosis d eines Umweltgiftes auf. Ferner werde der Anteil $p \in [0,1]$ des angesammelten Giftes wieder ausgeschieden.
- Wie beschreibt man dies mit Hilfe einer rekursiv definierten Folge a_n ?

$$\begin{aligned} a_0 &= d \\ a_n &= (1-p)a_{n-1} + d \end{aligned}$$

- Wie lautet diese Folge direkt (nicht rekursiv) definiert ?

$$\begin{aligned} a_1 &= (1-p)a_0 + d \\ a_2 &= (1-p)((1-p)d + d) + d \;=\; d((1-p)^2 + (1-p)^1 + (1-p)^0) \\ a_n &= d\sum_{i=0}^{n}(1-p)^i \;=\; d\,\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p} \end{aligned}$$

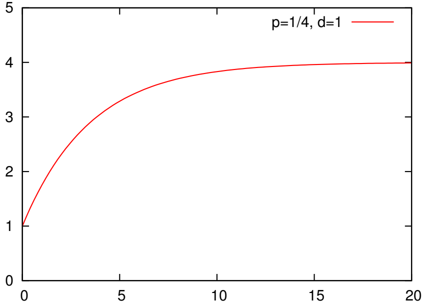
- Welche langfristige Vergiftung stellt sich ein ?

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; d/p$$

Anwendungsbeispiel (Fortsetzung)

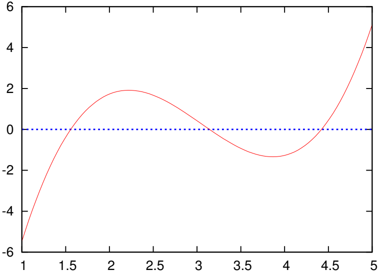
- Wie beschreibt man den Vorgang kontinuierlich (stetig) in der Zeit $t \geq 0$?

$$f(t) \quad = \quad d\,\frac{1-(1-p)^{t+1}}{p} \longrightarrow \frac{d}{p} \qquad (t \to \infty)$$



Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann hat f mindestens eine Nullstelle im Intervall $[a, b]$.



Folgerung 1: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert p mit $f(a) \leq p \leq f(b)$ in diesem Intervall an, d.h. es existiert stets ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = p$.

Minima und Maxima stetiger Funktionen

Folgerung 2: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auf diesem Intervall beschränkt und nimmt dort ihr Minimum und Maximum an, d.h. es existieren $x^-, x^+ \in [a, b]$ mit:

$$\begin{aligned} f(x^-) &= \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\ f(x^+) &= \sup_{x \in [a,b]} f(x) \end{aligned}$$

- Dies gilt nicht auf offenen oder halboffenen Intervallen, z.B., ist die stetige Funktion $f : x \to \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ nicht (nach oben) beschränkt und nimmt somit auch kein Maximum an.

Die Exponentialfunktion

- Die folgende unendliche Reihe konvergiert für alle reellen Zahlen x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Denn aufgrund Quotientenkriterium:

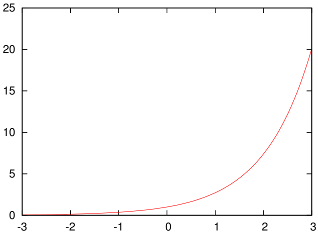
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad = \quad \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } n \geq 2|x|$$

- Die Exponentialfunktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$:

$$e^x \; = \; \exp(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad (\text{Konvention } 0^0 = 1)$$

- Durch e^x werden (in der Biologie) viele Wachstumsprozeße beschrieben.
- Es gilt die **Funktionalgleichung**:

$$e^{a+b} \quad = \quad e^a \, e^b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$



Die Logarithmusfunktion

- Der **Logarithmus** $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$:

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{sowie} \quad \exp(\ln(x)) = x$$

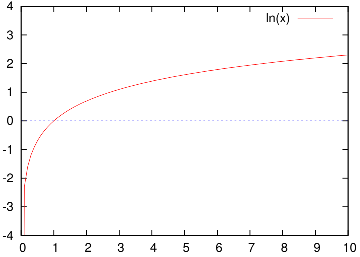
- **Funktionalgleichung** des Logarithmus:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

denn es gilt:

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv.

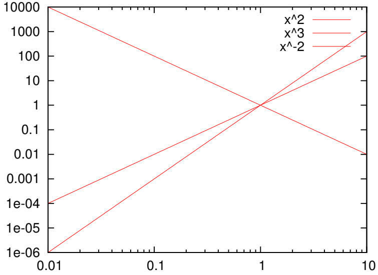


Logarithmische Skalierung

- Funktionale Zusammenhänge der Form

$$f(x) = x^\alpha$$

lassen sich sehr gut mittels logarithmischer Skalierung veranschaulichen:



- Der Exponent α entspricht dann gerade der Steigung der Geraden.

Kap. 5: Differenzierbarkeit

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad D \subset \mathbb{R}$$

Definitionen:

- Differenzenquotient an einer Stelle $x \in D$:

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- f heißt differenzierbar in $x \in D$, wenn die Folge der Differenzenquotienten für $h \to 0$ konvergieren. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von f an der Stelle x:

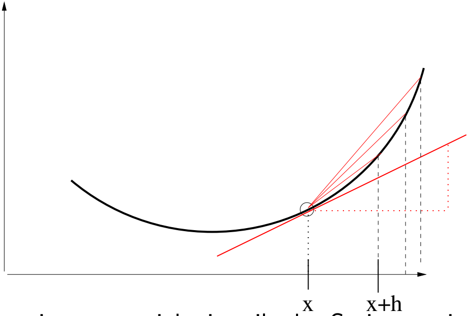
$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} D_h f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differenzierbare Funktionen

- Die Folge $(D_h f(x))$ muß für **jede** Nullfolge $h \to 0$ konvergieren, damit f differenzierbar ist.
- Damit $f(x+h)$ überhaupt definiert ist muß eine ganze (noch so kleine) Umgebung von x in D enthalten sein:

$$[x-\epsilon, x+\epsilon] \quad \subset \quad D \qquad \text{(für ein } \epsilon > 0\text{)}$$

- Die Ableitung entspricht gerade der Steigung der Tangente am Punkt x des Graphen von f.



- Ein Differenzenquotient entspricht jeweils der Steigung einer Sekante.

Beispiele differenzierbarer Funktionen

- Konstante Funktionen sind differenzierbar mit verschwindender Ableitung:

$$f(x) = c\,, \quad f'(x) = 0$$

- Monome vom Grad $n \in \mathbb{N}$ sind differenzierbar:

$$f(x) = x^n\,, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Die Summe differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Die Skalierung einer differenzierbaren Funktion mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar:

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

- Die trigonometrischen Funktionen sind differenzierbar:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Beispiel einer nicht differenzierbaren Funktionen

- Die Betragsfunktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

$$f(x) \quad = \quad |x|$$

- Denn für $h > 0$ gilt:

$$\lim_{h \searrow 0} D_h f(0) \quad = \quad 1 \qquad \text{(Grenzwert von oben)}$$

- aber für $h < 0$ gilt:

$$\lim_{h \nearrow 0} D_h f(0) \quad = \quad -1 \qquad \text{(Grenzwert von unten)}$$

- Damit existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0} D_h f(0)$ nicht.

Ableitung der Exponentialfunktion

- Für die Exponentialfunktion gilt:

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

- Begründung:

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^{x+h} - e^x) \quad = \quad e^x \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^h - 1)$$

- und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(e^h - 1) \quad &= \quad \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1\right) \\
&= \quad \frac{1}{h}(h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}h^3 + \ldots) \\
&= \quad 1 + \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{6}h^2 + \ldots \\
&\to \quad 1 \qquad\qquad (h \to 0)
\end{aligned}$$

Produktregel

Das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar mit Ableitung:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Beispiele:

- $f(x) = x^2 \sin(x)$

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

- $f(x) = x^n = xx^{n-1}$, $n-$maliges Anwenden der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{n-1} + x(x^{n-1})' \\ &= x^{n-1} + x(xx^{n-2})' \\ &= x^{n-1} + xx^{n-2} + x(x(x^{n-2})') \\ &= \dots \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Also wie bereits zuvor erwähnt.

Spezialfall der Quotientenregel

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x und gilt $f(x) \neq 0$, so ist auch

$$g \quad = \quad \frac{1}{f}$$

an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung:

$$g'(x) \quad = \quad -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- **Beispiel:** $f(x) = x^n$ dann ist $g(x) = 1/f(x) = x^{-n}$ und:

$$g'(x) \quad = \quad -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

Dies entspricht der bekannten Regel für Polynome (aber hier mit negativem Exponenten).

Quotientenregel

- Seien f, g differenzierbar im Punkt x und $g(x) \neq 0$.
- Kombination der Produktregel und der speziellen Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

- Dies ergibt die Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- **Beispiel:** Für $x \neq 0$:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{((x-1)')x - (x-1)(x')}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Kettenregel

- Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $f(x)$ differenzierbar.
- Dann ist auch $g \circ f$ in x differenzierbar mit der Ableitung:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

- **Beispiel:** Ableitung von $F(x) = (x^2 - 1)^4$

$$[(x^2 - 1)^4]' = 4(x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)' = 8x(x^2 - 1)^3$$

Anwendung auf Zerfallsraten

- Die Halbwertszeit T einer chemischen Substanz ist ein Maß für die zeitliche Entwicklung:

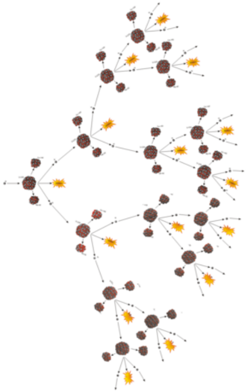
$$\begin{aligned} u(t) &= u(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} \\ &= u(0)\,\exp\left\{-(\ln 2)\frac{t}{T}\right\} \end{aligned}$$

denn $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

- Zerfallsrate / Aktivität:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(0)\,\exp\left\{-(\ln 2)\frac{t}{T}\right\}\left(-\frac{\ln 2}{T}\right) \\ &= -\frac{\ln 2}{T}u(t) \end{aligned}$$

Also $u' \sim -u$.



Ableitung der Inversen

- Sei D ein abgeschlossens Interval und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, sowie streng monoton.
- Dann existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : f(D) \to D$:

$$f^{-1}(f(x)) \quad = \quad x \qquad \forall x \in D$$

- Ist f ferner differenzierbar in $x \in D$ mit Ableitung $f'(x) \neq 0$, so ist auch f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar mit Ableitung:

$$(f^{-1})'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- **Beispiel:** Der Logarithmus ist die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion: $\ln(\exp(x)) = x$.

$$\ln'(y) \quad = \quad \frac{1}{\exp(x)'} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Lokale Extrema

- Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in I$ heißt lokales Maximum, wenn für ein beliebiges $\epsilon > 0$:

$$f(x) \quad \geq \quad f(y) \qquad \forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

- Entsprechend heißt x lokales Minimum, wenn

$$f(x) \quad \leq \quad f(y) \qquad \forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

- Ist f differenzierbar in x, so gilt für ein lokales Maximum, sowie für ein lokales Minimum **notwendigerweise**, dass die Ableitung im Punkt x verschwindet:

$$f'(x) \quad = \quad 0$$

- Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Ableitung (Bsp. x lokales Max.):

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \leq 0 \\ f^-(x) &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

f differenzierbar $\Longrightarrow f'(x) = f^+(x) = f^-(x) = 0$.

Bemerkungen zu lokalen Extrema

- Es handelt sich bei diesem Satz nur um eine **notwendige** Bedingung. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ kein lokales Extremum.
- Voraussetzung war ein offenes Intervall (a, b). Bsp.: $f(x) = x$ hat in $[0, 1]$ globale Extrema bei $x = 0$ und $x = 1$ aber die Ableitungen verschwinden nicht.

Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und in (a, b) differenzierbar.

(i) **Satz von Rolle:** Ist $f(a) = f(b)$, so besitzt f' in (a, b) eine Nullstelle.

(ii) **Mittelwertsatz:** Es existiert stets ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) \quad = \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Beweis: (i) Aufgrund der Stetigkeit wird sowohl das globale Maximum, sowie das globale Minimum von f in $[a, b]$ angenommen. Da OEdA f als nicht konstant angenommen werden kann, wird das Maximum oder das Minimum in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen. Hier gilt dann notwendigerweise $f'(\xi) = 0$.

(ii) Wir definieren die auf $[a, b]$ stetige, und auf (a, b) differenzierbare Funktion

$$g(x) \quad = \quad f(x) - c(x - a)\,, \quad c = (f(a) - f(b))/(a - b)$$

Da $g(a) = f(a) = g(b)$, folgt nach (i) die Existenz von $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$.

Zusammenhang Differenzierbarkeit und Monotonie

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf (a, b) stetig differenzierbar ist gilt:

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist **monoton wachsend** in $[a, b]$.
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist **monoton fallend** in $[a, b]$.
- Gilt oben "$>$" bzw. "$<$", so ist f **streng** monoton wachsend bzw. fallend.

$n-$maliges differenzieren

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist zweimal differenzierbar, wenn

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f'(x+h) - f'(x))$$

- Die Funktion heißt $n-$mal stetig differenzierbar, wenn die die $n-$te Ableitung für jedes $x \in D$ existiert und die Ableitungen selbst alle stetig sind.

Beispiele:

- Polynome sind beliebig häufig stetig differenzierbar.
- $\exp(x), \sin(x), \cos(x)$ sind beliebig häufig stetig differenzierbar.
- Nur einmal stetig differenzierbar im Nullpunkt:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \leq 0 \\ x^2, \text{ sonst} \end{cases}$$

Denn

$$f'(x) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \leq 0 \\ 2x, \text{ sonst} \end{cases}$$

ist nicht weiter differenzierbar im Nullpunkt.

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) zweimal differenzierbar. Falls

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) < 0)$$

für ein $x \in (a, b)$, so besitzt f in x ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis: Ist $f''(x) > 0$, so existiert ein $\epsilon > 0$ mit

$$\frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} \quad > \quad 0 \quad \forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

Da $f'(x) = 0$ folgt $f(y)/(y - x) > 0$, also

$$\begin{aligned} f'(y) \quad &> \quad 0 \text{ (bzw. } f \text{ streng monoton wachsend)}, \quad \text{wenn } x < y < x + \epsilon \\ f'(y) \quad &< \quad 0 \text{ (bzw. } f \text{ streng monoton fallend)}, \quad \text{wenn } x - \epsilon < y < x \end{aligned}$$

Also ist x ein lokales Minimum.

Beispiel zu lokalen Extrema

- Seien (beispielsweise) Meßwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben und sucht ein a:
  "möglichst nah" an allen a_i.
- Bestimme Minimum der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$$

- Erste Ableitung:

$$f'(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} 2(x - a_i) = 2\left(nx - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

- Einzige Nullstelle von f' ist das arithmetische Mittel:

$$\overline{a} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Dies ist ein lokales Minimum, da $f''(\overline{a}) = 2n > 0$.

Anwendungsbeispiel

- Energieverbrauch eines Zugvogels mit Gewicht m und Fluggeschwindigkeit v:

$$E(v) \quad = \quad A\rho v^3 + \frac{m^2}{\rho v} \qquad \text{(Pennycuick)}$$

$\rho =$ Dichte der Luft, $A =$ Maß für angeströmte Fläche.

- Frage: optimale Fluggeschwindigkeit ?
- Ableitungen:

$$E'(v) \quad = \quad 3A\rho v^2 - \frac{m^2}{\rho v^2}$$

$$E''(v) \quad = \quad 6A\rho v + \frac{2m^2}{\rho v^3}$$

- Notwendige Bedingung:

$$E'(v_{min}) \quad = \quad 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{min} = \left(\frac{m^2}{3A\rho^2}\right)^{1/4}$$

- Hinreichende Bedingung:
Da $E''(v) > 0$ für $v > 0$ ist v_{min} ein globales Minimum.

Taylorentwicklung

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ $n-$mal stetig differenzierbar im Punkt $x \in D$, so gilt die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x^*) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \; + \; \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x^*) \end{aligned}$$

  mit $x \leq x^* \leq x+h$ (bzw. $x+h \leq x^* \leq x$).
- Ersetzung von x^* durch x ergibt die Näherungsformel:

$$f(x+h) \quad \approx \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

  Hierbei wird f also in einer Umgebung von x (h klein) angenähert durch ein Polyom vom Grad n.

Anwendung der Taylorentwicklung

- Entwicklung von $\exp(x)$ bei $x = 0$:

$$\exp(h) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}$$

entspricht gerade der endlichen Version der ursprünglichen unendlichen Reihe.

- Entwicklung von $\sin(x)$ bei $x = 0$:

$$\sin(h) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

da $\sin^{(2k)}(0) = \pm\sin(0) = 0$ und $\sin^{(2k+1)}(0) = \pm\cos(0) = \pm 1$.

Diskrete Differenzenquotienten

- Ableitungen können durch Differenzenquotienten approximiert werden.
- **Beispiel:** Approximation der 1. Ableitungen

$$f'(x) \approx D_h f(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) \qquad x \in (a,b)$$

- Dies ist von **2. Ordnung**, falls f zweimal stetig differenzierbar:

$$|D_h f(x) - f'(x)| \leq \frac{1}{6} h^2 \sup_{y \in (a,b)} |f^{(3)}(y)|$$

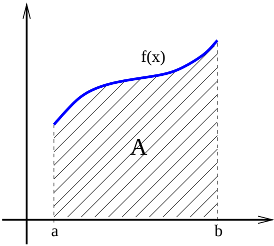
- Dies sieht man mittels Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_1) \\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_2) \\
D_h f(x) &= f'(x) + \frac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)) \qquad \xi_1, \xi_2 \in [x-h, x+h]
\end{aligned}$$

Kap. 6: Integralrechnung

klassische Aufgabe: Inhaltsmessung

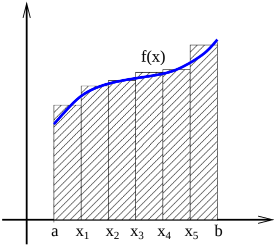
- Gesucht: Fläche A des Gebietes zwischen dem Graphen der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse.



- Zerlegung Z_n des Intervalls $I = [a, b]$ in n Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ mit $k = 1, \ldots, n$:

$$a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n := b.$$

- "Feinheit" der Zerlegung: $h := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$



- Die mit irgendwelchen Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \approx A$$

  ist dann eine Näherung für den Flächeninhalt A.

- Idee: Grenzübergang $h \to 0$ und $n \to \infty$!

Das (Riemann-)Integral

Definition: Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z_n von $[a, b]$ wie oben wird die mit irgendwelchen Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe

$$RS_{Z_n}(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als eine "Riemann'sche Summe" von f bezeichnet.

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt "(Riemann-)integrierbar", wenn für jede Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit $h \to 0$ $(n \to \infty)$ alle zugehörigen Riemann'schen Summen gegen denselben Limes konvergieren.

Dieser Limes heißt dann das "(Riemann-)Integral" von f über $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} RS_{Z_n}(f).$$

Beispiele integrierbarer Funktionen

- Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.
- Monotone, beschränkte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.
- Summen integrierbarer Funktionen sind integrierbar:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

- skalare Vielfache integrierbarer Funktionen sind integrierbar:

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx \quad = \quad \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Produkte integrierbarer Funktionen sind integrierbar.

aber im Allg.: $$\int_a^b (fg)(x)\,dx \quad \neq \quad \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Eigenschaften von Integralen

- Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f \le g$, so gilt auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \le \quad \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Aufspaltung eines Integrals, $a \le b \le c$:

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

- Konvention:

$$\int_a^a f(x)\,dx \quad := \quad 0.$$

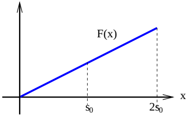
- Ist $a < b$, so setzt man

$$\int_b^a f(x)\,dx \quad := \quad -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Einige Anwendungen der Integralrechnung

- Das Hookesche Gesetz beschreibt die Spannkraft einer Feder in Abhängigkeit des Betrages der Ausdehnung s:

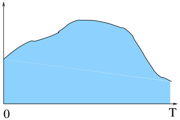
$$F(s) = ks, \qquad \text{mit } k > 0.$$



Die Energie E_1 (bzw. E_2), die benötigt wird, um die Feder von $s = 0$ auf $s = s_0$ (bzw. $s = 2s_0$) zu dehnen, ergibt sich durch Integrieren:

$$E_1 = \int_0^{s_0} F(s)\, ds, \qquad E_2 = \int_{s_0}^{2s_0} F(s)\, ds.$$

- $g = g(t)$ sei die (kontinuierliche) Wachstumsrate einer Population. Wir fragen nach dem Gesamtzuwachs $G(T)$ der Population in einem Zeitintervall $[0, T]$.
Die Lösung erhält man durch Integrieren:



$$G(T) = \int_0^T g(t)\, dt.$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Mittelwertsatz: Seien $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\varphi \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \quad = \quad f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Im Spezialfall $\varphi \equiv 1$: Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) \quad = \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis: Mit $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} m\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad &\leq \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx \\ \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \quad &= \quad \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad \text{für ein } \mu \in [m, M]. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für f existiert $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. $\square$

Stammfunktionen

Sei I ein abgeschlossenes, offenes oder halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition: Unter einer Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ versteht man eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F'(x) \quad = \quad f(x) \quad \forall x \in I.$$

Eine Stammfunktion ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt:
- Mit $F(x)$ ist auch $F(x) + c$ Stammfunktion.
- Seien umgekehrt F und G Stammfunktionen von f, dann ist $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, und also $F - G = \text{const}$.

Beispiele:

- $\exp(x)$ ist die Stammfunktion von $\exp(x)$.
- $\ln(x)$ ist die Stammfunktion von $1/x$.
- $\sin(x)$ ist die Stammfunktion von $\cos(x)$.

Der Fundamentalsatz der Analysis

Der nun zu behandelnde sog. “Fundamentalsatz der Analysis” ist von größter Bedeutung, und zwar sowohl aus theoretischer Sicht, als auch für die praktische Berechnung von Integralen. Er besagt nämlich, daß in gewissem Sinne die Integration die Umkehrung der Differentiation ist.

Der Fundamentalsatz besteht aus zwei Teilen:

Teil 1: Für eine stetige Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das Integral

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy, \quad x \in [a, b],$$

aufgefaßt als Funktion der oberen Grenze x, eine Stammfunktion von f.

Teil 2: Ist umgekehrt die Funktion $F : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Teil 1: Für eine stetige Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das Integral

$$F(x) := \int_a^x f(y)\, dy, \quad x \in [a, b],$$

aufgefaßt als Funktion der oberen Grenze x, eine Stammfunktion von f.

Beweis: Wir betrachten Differenzenquotienten der Funktion $F(x)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(y)\, dy - \int_a^x f(y)\, dy \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\, dy.$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt dann mit einem $\xi_h \in [x, x+h]$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\xi_h \to x$, so daß wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h) \; = \; f(x).$$

$\square$

Fundamentalsatz (Teil 2) - Beweis

Teil 2: Ist die Funktion $F : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Beweis: Sei F Stammfunktion von f, d.h. $F'(x) = f(x)$. Mit der Funktion

$$G(x) := \int_a^x f(y)\,dy$$

ist dann $F - G$ konstant. Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

was zu zeigen war. □

Integrationsformeln - partielle Integration

Wir beschreiben im folgenden einige nützliche Methoden zur Berechnung von bestimmten Integralen.

Partielle Integration: Seien $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (fg)(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis: Durch Integration der Identität (Produktregel!)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

erhalten wir

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = (fg)(x)\big|_a^b,$$

woraus direkt die behauptete Formel folgt. $\square$

Partielle Integration - Beispiel

Wir setzen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\cos(x)$, und erhalten mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2(x)\,dx &= -\sin(x)\cos(x)\big|_a^b + \int_a^b \cos^2(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x)\big|_a^b + \int_a^b (1-\sin^2(x))\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x)\big|_a^b + (b-a) - \int_a^b \sin^2(x)\,dx,
\end{aligned}$$

und folglich

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\big|_a^b.$$

Analog berechnet man $\int_a^b \cos^2(x)$. (Übungsaufgabe!)

Integrationsformeln - Substitutionsregel

Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt die sog. "Substitutionsregel":

$$\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Die Komposition $F \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dann stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt:

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes folgt dann

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(y)\,dy = (F \circ \varphi)(y)\Big|_a^b \\ &= (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

$\square$

Substitutionsregel - Beispiel

Manchmal kann man einen Integranden durch geschicktes Umformen auf die Gestalt $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ bringen, und dann die Substitutionsregel anwenden.

Wir wollen(?) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ berechnen. Hierzu setzen wir $f(x) = \frac{1}{x}$, und $\varphi(y) = 1 + y^2$, und formen wie folgt um:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,2y\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)\Big|_1^2 \\
&= \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Beispiele zur Substitutionsregel (1)

- Da $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x) = -\cos'(x)/\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \tan(x)\,dx &= -\int_a^b \frac{\cos'(x)}{\cos(x)}\,dx \\
&= -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{y}\,dy \\
&= -\ln(x)\Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)}
\end{aligned}$$

Beispiele zur Substitutionsregel (2)

- Mit $y = g(x) = \tan(x)$ gilt für bspw. $0 < a \leq b < \pi/2$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{\sin(x)\,\cos(x)} &= \int_a^b \frac{dx}{\tan(x)\,\cos^2(x)} \\
&= \int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \\
&= \int_{\tan a}^{\tan b} \frac{1}{y}\,dy \\
&= \ln(y)\Big|_{y=\tan a}^{y=\tan b} \\
&= \ln(\tan b) - \ln(\tan a)
\end{aligned}$$

Beispiele zur Substitutionsregel (3)

- Partielle Integration ($f(x) = x$, $g(x) = (1+x)^{3/2}$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx &= \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= \frac{2}{3}f(x)g(x)\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

- Und dann per Substitution

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+x)^{3/2}\,dx &= \int_1^2 y^{3/2}\,dy \\ &= \frac{2}{5}y^{5/2}\Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale (1)

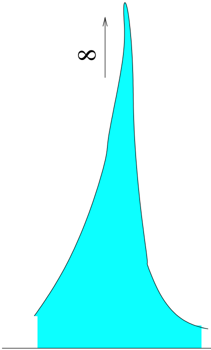
Es gibt zwei Arten von uneigentlichen Integralen:

(1) Integrale über unbeschränkte Funktionen:

- Über gewisse Singularitäten kann man “hinweg” integrieren.
- Beispiel für $s < 1$:

$$0 < t < 1: \qquad \int_t^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_{x=t}^{x=1} = \frac{1-t^{1-s}}{1-s}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}$$



- Man kann nicht über jede Singularität integrieren, z.B.:

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx \quad = \quad \ln 1 - \ln a$$

ist für $a \leq 0$ **nicht** definiert.

Uneigentliche Integrale (2)

(2) Integrale mit Grenzen ∞ und/oder $-\infty$:

- Sofern der Grenzwert existiert, versteht man unter einem uneigentlichen Integral mit Grenze ∞:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

- Bei einem uneigentlichen Integral mit zwei Grenzen $\pm\infty$ müssen beide Grenzwerte existieren (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$):

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

- Beispiele:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx \quad = \quad \lim_{a\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty} (-e^{-a}) + e^0 = 1$$

$$s > 1: \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \quad = \quad \lim_{a\to\infty} \frac{1}{-s+1} x^{-s+1}\Big|_{x=1}^{x=a} = \lim_{a\to\infty} \frac{1-a^{1-s}}{s-1} = \frac{1}{s-1}$$

Beispiele nicht konvergenter uneigentlicher Integrale

- Folgender Ausdruck ist “sinnleer”

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,dt \qquad \text{obgleich} \qquad \lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} t\,dt = 0\,.$$

- Über die Singularität von $x \to \frac{1}{x}$ kann man nicht integrieren:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx \quad = \quad \ln a - \ln 1 \;\to\; \infty \qquad\quad (a \to \infty)$$

Vgl. Übungsaufgabe 7.2: man findet eine Treppenfunktion, die $\frac{1}{x}$ minorisiert aber nicht integrierbar ist für $a = \infty$.

Anwendung auf die Normalverteilung

- Eine zentrale Funktion in der Statistik ist die Funktion (Standard-Normalverteilung):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Die Ableitung besitzt die einzige Nullstelle bei $x = 0$, denn

$$f'(x) = -xf(x)$$

- Zweite Ableitung ist negativ bei $x = 0$, denn

$$f''(x) = x^2 f(x) - f(x) = f(x)(x^2 - 1)$$

  Daher liegt bei $x = 0$ sogar ein lokales Maximum vor (sogar globales Max., da keine weiteren Extrema).

- Für das uneigentliche Integral kann man zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

  denn

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \exp(-y^2)\, dy = \sqrt{\pi/2}$$

Kap. 7: Matrizenrechnung

- Unter dem $n-$dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) versteht man den Raum der Vektoren (oder auch $n-$Tupel)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}\,.$$

- Vektoren lassen sich Addieren

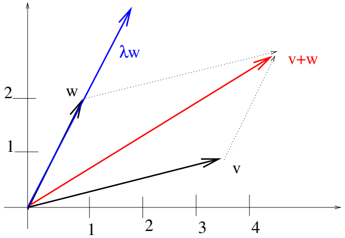
$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\,, \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- und skalar Multiplizieren (skalieren):

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\,, \lambda \in \mathbb{R}: \qquad \lambda\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

Grafische Darstellung von Vektoren in $\mathbb{R}^2$

- Die skalare Multiplikation $\lambda\mathbf{w}$ entspricht einer Streckung (oder Stauchung) um den Faktor λ.
- Die Addition von Vektoren, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, entspricht dem *aneinander heften* der Vektoren.



Normen von Vektoren

Unter einer Norm auf $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ versteht man eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- Linearität für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\lambda \mathbf{v}\| \quad = \quad |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|$$

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \quad \leq \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

- Gilt $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{0}$, so ist bereits $\mathbf{v} = (0, \ldots, 0)^T = \mathbf{0}$ (Nullvektor).

Beispiele von Normen:

- Die Euklidische Norm entspricht anschaulich der “Länge” eines Vektors:

$$\|\mathbf{v}\|_2 \quad := \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

- Maximums-Norm:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty \quad := \quad \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

Skalarprodukt

- Das (euklidische) Skalarprodukt ist eine skalare Größe:

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \qquad \mathbf{v}^T \mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

  $\mathbf{v}^T$ werden wir als "liegenden" Vektor verstehen: $\mathbf{v}^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$
- Verschwindet das Skalarprodukt, so sind die Vektoren orthogonal zueinander:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$$

  z.B. $\mathbf{v}^T = (1, 2, 3)$ und $\mathbf{w}^T = (1, 1, -1)$.
- Sind $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in [0, 2\pi]$ ihr Winkel zueinander so entspricht $\mathbf{v}^T \mathbf{w}$ gerade:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{w} \quad = \quad \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 \cos\theta$$

- Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\mathbf{v}^T \mathbf{w}| \quad \leq \quad \|\mathbf{v}\|_2 \, \|\mathbf{w}\|_2$$

Lineare Abhängigkeit

- Unter einer Linearkombination von Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ versteht man einen Vektor der Form:

$$\mathbf{v} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v_i} \in \mathbb{R}^n$$

- Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig, wenn der eine eine Skalierung des anderen ist, also

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w} \qquad \text{mit beliebigem } \lambda \in \mathbb{R}$$

  bzw. es gibt $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$ und $\alpha_1 \mathbf{v} + \alpha_2 \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

- Endlich viele Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig, wenn es eine **nichttriviale** Linearkombination gibt, die Null ergibt, also für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}\,, \qquad \text{mit mind. einem } \alpha_i \neq 0\,.$$

Beispiele zur linearen Abhängigkeit

- Die drei Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  sind linear abhängig, da $\mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$.

- Im allgemeinen sieht man dies nicht sofort, so dass man zunächst ein lineares Gleichungssystem (LGS) aufstellen muss:

$$\mathbf{v_1}x_1 + \mathbf{v_2}x_2 + \mathbf{v_3}x_3 = \mathbf{0}$$

  Speziell hier also:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

  Hat dieses LGS eine von Null verschiedene Lösung?

Eigenschaften linearer Abhängigkeit

- Eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor $\mathbf{0}$ enthält, ist immer linear abhängig.
- Jede Untermenge linear unabhängiger Vektoren ist wieder linear unabhängig.
- m Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ mit $m > n$ sind immer linear abhängig.
- Die Einheitsvektoren $\mathbf{e_i} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, mit

$$\mathbf{e_i}^T \quad = \quad (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$$

  sind stets liner unabhängig.
- Seien $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ gegeben und seien $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m} \in \mathbb{R}^n$ jeweils Linearkombinationen aus den $\mathbf{v_i}$. Sind nun die $\{\mathbf{w_i},\ i = 1, \ldots, m\}$ linear unabhängig, so sind es auch die $\{\mathbf{v_i},\ i = 1, \ldots, m\}$.

Basis des $\mathbb{R}^n$

Unter einer Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$ versteht man n linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$.

Eigenschaften von Basen:

- Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich stets eindeutig durch die Elemente einer Basis als Linearkombination darstellen:

$$v \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v_i}\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

- Man sagt daher, dass der Raum durch die Basiselemente aufgespannt wird:

$$\mathbb{R}^n \quad = \quad span\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$$

Unterräume des $\mathbb{R}^n$

- Unter einem Unterraum des $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, mit:

$$\begin{array}{rlcl} (i) & U \neq \emptyset & & \\ (ii) & \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U & \Rightarrow & \mathbf{v} + \mathbf{w} \in U \\ (iii) & \mathbf{v} \in U & \Rightarrow & \lambda \mathbf{v} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

- Im $\mathbb{R}^3$ sind dies Geraden und Ebenen die durch den Ursprung gehen, oder aber $\{\mathbf{0}\}$ oder der ganze Raum $\mathbb{R}^3$ selbst.
- Beliebige Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ spannen stets einen Unterraum auf:

$$U = span\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$$

- Sind diese Vektoren zudem linear unabhängig, so bilden diese m Vektoren eine Basis von U. Der Raum U besitzt dann die Dimension $m \leq n$.

Beispiele von Unterräumen

- Der 0-dimensionale Raum:

$$U = \{\mathbf{0}\}$$

- Eindimensionale Räume sind Geraden:

$$U = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

- Zweidimensionale Räume sind Ebenen:

$$U = \{\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \quad \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \text{ linear unabhängig.}$$

Matrizen

- Unter einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ versteht man ein geordnetes Zahlenschema der Form

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Dies haben also die Form von n Spaltenvektoren der Länge m, bzw. m Zeilenvektoren der Länge n.
- Unter dem Spaltenrang von A versteht man die Dimension des Raumes der von den Spaltenvektoren aufgespannt wird:

$$\text{Spaltenrang } A = \dim(span\{\mathbf{a}_{\cdot,\mathbf{1}}, \mathbf{a}_{\cdot\mathbf{2}}, \ldots, \mathbf{a}_{\cdot\mathbf{n}}\})$$

- Entsprechend ist der Zeilenrang von A die Dimension des Raumes der von den Zeilenvektoren aufgespannt wird:

$$\text{Zeilenrang } A = \dim(span\{\mathbf{a}_{\mathbf{1},\cdot}, \mathbf{a}_{\mathbf{2},\cdot}, \ldots, \mathbf{a}_{\mathbf{m},\cdot}\})$$

Operationen mit Matrizen

- Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können addiert werden, indem die einzelnen Einträge addiert werden:

$$A + B \quad = \quad (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

  Es gelten das Kommutativgesetz (KG) und Assoziativgesetz (AG).
- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden:

$$\lambda A \quad = \quad (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ kann mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ multipliziert werden:

$$AB \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

  Das Ergebnis ist eine $m \times n$ Matrix AB. Es gilt das AG.
- Die Multiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h. i.A.

$$AB \quad \neq \quad BA\,,$$

  selbst wenn beide Produkte wohldefiniert sind, also $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Anwendungsbeispiele mit Matrizen (1)

(1) Stöchiometrische Matrizen:

- Analyse von metabolischen Netzwerken, z.B.:

$$\begin{aligned} \text{Glukose} + \text{ATP} &\rightarrow \text{Glukose-6-Phosphat} + \text{ADP} \\ \text{Glukose-6-Phosphat} &\rightarrow \text{Glukose-1-Phosphat} \end{aligned}$$

- Anordnung der stöchiometrischen Koeffizienten in Matrixform: Produkte (positive Koeffizienten), Edukte (negative Koeffizienten)
- Spalte $\hat{=}$ Reaktion, Zeilen $\hat{=}$ chem. Spezies
- Hier bei Anordnung $(G, G6, G1, ATP, ADP)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiele mit Matrizen (2)

(2) Anreicherung von Schadstoffen in Nahrungsketten:

- Pflanzenarten $\{b_1, \ldots, b_r\}$, Pflanzenfresser $\{p_1, \ldots, p_s\}$, Fleischfresser $\{f_1, \ldots, f_t\}$
- Die Pflanzen b_j dienen den Pflanzenfressern p_k als Nahrung, die Pflanzenfresser p_k dienen den Fleischfressern f_i als Nahrung:

$$b_j \quad \underbrace{\longrightarrow}_{B} \quad p_k \quad \underbrace{\longrightarrow}_{A} \quad f_i \qquad \text{(Nahrungskette)}$$

- Die Pflanzen seien mit Schadstoffen belastet.
- **Frage:** Inwieweit werden die armen Fleischfresser belastet ?
- **Lösung:**
  $B = (b_{kj}) \in \mathbb{R}^{s \times r}$ beschreibe die jeweilige Aufnahme von b_j durch p_k.
  $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{t \times s}$ beschreibe die jeweilige Aufnahme von p_k durch f_i.
  $C = AB \in \mathbb{R}^{t \times r}$ beschreibt dann die indirekte Aufnahme von b_j durch f_i:

$$c_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \;\hat{=}\; \text{(Aufnahme von Pflanze } b_i \text{ durch } f_j\text{)}$$

Beispiel zur Matrizenmultiplikation

Vorherige Nahrungskette:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fleischfresser f_2 nimmt bspw. indirekt die Menge 8 an Pflanzenart p_1 auf.

Lineare Abbildungen

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann man auffassen als eine lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$
mittels Matrix-Vektor Multiplikation:
$$y_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.$$
- Das Bild von A ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$ und wird mit $R(A)$ bezeichnet ("range"):
$$\begin{aligned} \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R(A) &\Rightarrow \text{es existieren } \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^n \,, \mathbf{v} = A\mathbf{x_1} \,, \mathbf{w} = A\mathbf{x_2} \\ &\Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = A(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) \in R(A) \end{aligned}$$
Analog mit der skalaren Multiplikation: $\mathbf{v} \in R(A) \Rightarrow \lambda\mathbf{v} \in R(A)$.
- Die Dimension von $R(A)$ wird als Rang von A bezeichnet:
$$rang(A) = dim(R(A)) \leq \min\{m, n\} \,.$$
- Dies entspricht ebenso dem Spaltenrang, sowie dem Zeilenrang:
$$rang(A) = \text{Spaltenrang } A = \text{Zeilenrang } A$$

Beispiel

- Zurück zu unserer Nahrungskette:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix}$$

- Spaltenrang $C = 2$, da

$$\mathbf{v_2} = 4\mathbf{v_1} \text{ und } \mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3} = \mathbf{v_4}$$

- Zeilenrang $C = 2$, da

$$2(8,2,1,5)^T - (4,1,2,7)^T = (12,3,0,3)^T$$

- also $rang(C) = 2$
- Bild von C:

$$R(C) = span\{\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} = span\{C\mathbf{e_2}, C\mathbf{e_3}\}$$

Lineare Gleichungssysteme (Beispiel)

- Immer noch Nahrungskette:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Angenommen man messe Konzentrationen eines Schadstoffes in den drei Fleischfressern: $\mathbf{b} = (0.12,\, 0.02\,,0.001)^T$
- Läßt sich hieraus auf die Belastung in den vier Pflanzenarten schliessen ?
- Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 &= 0.12 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 &= 0.02 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= 0.001 \end{aligned}$$

  oder kompakt:

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- **Frage:** Hat dieses Gleichungssystem eine (oder sogar mehrere) Lösung(en) ?

$$\mathbf{b} \in R(C)\,?$$

Lineare Gleichungssysteme

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, gesucht $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- **Fragen:**
  (i) Hat dieses LGS eine Lösung ?
  (ii) Ist diese Lösung eindeutig ?
  (iii) Welchen Einfluß haben m und n ?
  (iv) Wie bestimme ich eine (alle) Lösungen ?
  (v) Was mache ich, wenn $N \sim 10^8$?

Quadratische Matrizen

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt quadratisch.
- Eine quadratische Matrix A heißt regulär, wenn sie vollen Rang besitzt, also

$$Rang(A) \quad = \quad m = n\,.$$

  Was dies bedeutet für zugehörige LGSe werden wir im folgenden sehen.
- Eine nicht reguläre quadratische Matrix A heißt singulär, also

$$Rang(A) \quad < \quad m = n\,.$$

Kern einer linearen Abbildung

- Unter dem Kern einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ versteht man den Unterraum $Ker(A) \subset \mathbb{R}^n$, der von A auf den Nullvektor abgebildet wird:

$$Ker(A) \quad = \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- Es gilt stets $\mathbf{0} \in Ker(A)$.
- Es gilt die Dimensionsformel:

$$n \quad = \quad \dim(Ker(A)) + rang(A)$$

- Beispiel Nahrungskette: $\dim(Ker(C) = n - rang(C) = 4 - 2 = 2$.
- Die Bestimmung des Kerns von A entspricht dem Lösen des homogenen LGSs:

$$A\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{0}$$

Homogene und inhomogene LGSe

- Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ Lösung des inhomogenen LGS:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

und $\mathbf{y} \in Ker(A)$, also Lösung des homogenen LGS:

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{2}$$

so ist offensichtlich auch $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ Lösung des inhomogenen LGS (1):

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

- Die Umkehrung gilt auch, d.h. sind $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ Lösungen des inhomogenen LGS (1), so ist $\mathbf{y} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in Ker(A)$.

Lösungstheorie

$$A\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Das LGS ist **lösbar** für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:
$$\begin{array}{rl} (i) & A \text{ ist surjektiv} \\ (ii) & R(A) = \mathbb{R}^m \\ (iii) & m = Rang(A) \end{array}$$
- Das LGS ist **eindeutig lösbar** für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:
$$\begin{array}{rl} (i) & A \text{ ist bijektiv} \\ (ii) & R(A) = \mathbb{R}^m \text{ und } Ker(A) = \{\mathbf{0}\} \\ (iii) & n = Rang(A) = m \\ (iv) & A \text{ regulär} \end{array}$$
- Das LGS ist lösbar für gewisse $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, aber dann stets eindeutig, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:
$$\begin{array}{rl} (i) & A \text{ ist injektiv} \\ (ii) & Ker(A) = \{\mathbf{0}\} \\ (iii) & n = Rang(A) \end{array}$$

Charakterisierung aller Lösungen

Damit ergibt sich folgende Charakterisierung aller Lösungen des inhomogenen LGS:

- **Satz:** Die allgemeine Lösung eines inhomogenen LGS (1) erhält man durch Addition einer speziellen Lösung $\mathbf{x}$ von

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  mit einer allgemeinen Lösung $\mathbf{y}$ des homogenen LGS

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

- Damit genügt i.a. folgendes:
  (i) Eine spezielle Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ finden.
  (ii) $Ker(A)$ bestimmen.

Beispiel

- Eine 2×3 Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Spezielle Lösung $\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T$.
- Kern der Abbildung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad dim(Ker(A)) = n - rang(A) = 1$$

  Offensichtlich muss gelten $y_3 = -y_2$ und $y_1 = -2y_2 - 3y_3 = y_2$.
- Daher hat man genau einen freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\mathbf{y} \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

- Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\mathbf{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen

- Im Spezialfall $m = n$ versteht man unter einer oberen Dreiecksmatrix eine Matrix der Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ein zugehöriges LGS $Ax = b$ läßt sich leicht lösen, wenn $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, mittels rückwärts Einsetzen:

$$\begin{aligned} a_{nn}x_n &= b_n & \Rightarrow \quad x_n &= \frac{1}{a_{nn}} b_n \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} & \Rightarrow \quad x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) \\ &\vdots & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i &= b_1 & \Rightarrow \quad x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i) \end{aligned}$$

Beispiel zum rückwärts Einsetzen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_3 &= 0 - 5x_4 = -5 \\ x_2 &= \frac{1}{3}(3 - 2x_3 + 2x_4) = 5 \\ x_1 &= \frac{1}{2}(1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4) = -14 \end{aligned}$$

Gauß'sches Eliminationsverfahren

- **Grundidee:** Bringe eine quadratische Matrix durch erlaubte Modifizierungen in oberen Dreiecksform.
- Erlaubt sind:
  (i) Skalierung von Zeilen mittels Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.
  (ii) Addition einer Zeile zu einer anderen.
- Diese Modifizierungen müssen mit der rechten Seite b analog durchgeführt werden.
- Gleiches läßt sich auch auf nicht quadratische Matrizen anwenden: Zugehörige Dreiecksgestalt die am Ende erreicht werden soll:

$$m > n : \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m < n : \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Beispiel zur Gauß'schen Elimination

- Ausgangssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 12 & 12 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 86 \\ 27 \end{pmatrix}$$

- Ziehe 1. Zeile von der letzten ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 12 & 12 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 86 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Ziehe 4-faches der 1. Zeile von der zweiten ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Ziehe 0.5-faches der 2. Zeile von der 3. ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zur Gauß'schen Elimination (2)

- Eine spezielle Lösung erhält man z.B. durch:

$$x_1 = x_2 = 0\,, \quad x_3 = -16\,, x_4 = \frac{1}{4}(22 + 2x_3) = -\frac{5}{2}$$

- Homogenes System:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Die letzte Gleichung kann offensichtlich vernachlässigt werden.
- Wir haben offensichtlich zwei freie Parameter, denn $dim(Ker(A)) = 2$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha, \quad y_2 = \beta\,, \quad y_3 = 3y_1 + 2y_2\,, \\ y_4 &= \frac{1}{4}(-4y_2 + 2y_3) = -\beta + \frac{1}{2}y_3 = \frac{3}{2}\alpha \end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -16 + 3\alpha + 2\beta \\ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel: Populationsdynamik

- Ziel: Beschreibung einer Populationsentwicklung
- Ann.: Geburten- und Sterbeprozesse in festen Zeitschritten Δt ($= 1$ Jahr).
- Einteilung in Altersgruppen:
  x_1 für die Anzahl Individuen im Alter von 0 bis Δt,
  x_2 im Alter von Δt bis $2\Delta t, \ldots, x_n$ von $(n-1)\Delta t$ bis $n\Delta t$
- Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$: Vektor $\mathbf{x}(0)$
- Übergang zum nächsten Zeitpunkt $t = \Delta t$: $\mathbf{x}(0) \to \mathbf{x}(\Delta t)$:

$$\begin{array}{cl} \text{Neugeborene} & x_1(\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i(0) \\ \text{Alterungsprozess} & x_{i+1}(\Delta t) = a_i x_i(0) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \end{array}$$

  $f_i =$Fortpflanzungsrate, $a_i =$Überlebenswahrscheinlichkeit der Altersgruppe i.
- In Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_n \\ a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(0) \quad = \quad \mathbf{x}(\Delta t)$$

Populationsdynamik (2)

- Mit dieser Matrix läßt sich nun die Populationsdynamik beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\Delta t) &= A\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2\Delta t) &= A\mathbf{x}(\Delta t) = A(A\mathbf{x}(0)) = A^2\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k\Delta t) &= A^k\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

- Konstantes Gleichgewicht bedeutet:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

  hieraus folgt dann $A^k\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Konstante Proportionen der Altersgruppen:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

  Falls $\lambda > 1$: Wachstum.
- Ein solches λ heißt Eigenwert von A. Der Vektor $\mathbf{x}$ heisst dann Eigenvektor.

Populationsdynamik (3)

Frage: Existiert ein $\mathbf{x}$, so dass die Population konstant bleibt, also $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

- Also $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\qquad$ (I =Einheitsmatrix).
- Man betrachtet also den Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_n \\ a_1 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel:

- $f_k = 0.2$, $a_k = 0.8$, $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & -1 \end{pmatrix}$$

- In diesem Fall hat die Matrix vollen Rang 4 (Nachrechnen !), also

$$dim(Ker(A)) \quad = \quad n - rang(A) = 0$$

Damit bleibt in diesem Bsp. nur bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Population konstant (Null).

Determinanten

- Die Determinante einer 2×2 Matrix ist definiert durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Die Determinante einer 3×3 Matrix ist definiert durch

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

- Die Berechnungsvorschrift für Determinanten einer allgemeinen quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 4$, ist sehr aufwändig.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

Rechenregeln für Determinaten

- Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(AB) \quad = \quad \det A \cdot \det B$$

- Aber i.a:

$$\det(A + B) \quad \neq \quad \det A + \det B$$

- Transponierte Matrizen:

$$\det A^T \quad = \quad \det A$$

- Für eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Determinante gerade das Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det A \quad = \quad a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Entwicklungssatz von Laplace

- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, so entsteht $A'_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte:

$$A'_{ij} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{13} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i3} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{31} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \textit{i}\text{-te Zeile gestrichen}$$

$\uparrow$ j-te Spalte gestrichen

- Die Determinante $\det(A'_{ij})$ ist ein sogenannter Minor von A.
- Entwicklung nach der i-ten Zeile (für $n \geq 2$):

$$\det A \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte (für $n \geq 2$):

$$\det A \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$$

Beispiel für den Entwicklungssatz von Laplace

- Bsp. Entwicklung nach der 2-ten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2(2+4) = 12$$

- Bsp. Entwicklung nach der 3-ten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 + 4 = 12$$

Anwendung auf Populationsmatrizen (1)

- Wir betrachten die Populationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 50 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

und fragen nach einer stabilen Altersverteilung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ setzt voraus das $(A - \lambda I)$ singulär ist, also:

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 80 & 50 & 0 \\ 0.6 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 80 & 50 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.4 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0.4 & -\lambda \end{vmatrix} - 0.6 \begin{vmatrix} 80 & 50 \\ 0.4 & -\lambda \end{vmatrix} \right) \\
&= -\lambda(-\lambda^3 - 0.6(-80\lambda - 50 \cdot 0.4)) \\
&= -\lambda(-\lambda^3 + 48\lambda + 12)
\end{aligned}$$

Anwendung auf Populationsmatrizen (2)

- Nullstellensuche:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad -\lambda^3 + 48\,\lambda + 12 = 0$$

- Der Eigenwert $\lambda = 0$ korrespondiert zu einem Eigenvektor $\mathbf{x} = (0, 0, 0, x)^T$ (d.h. nur älteste Generation ist vertreten). Unter Anwendung von A ergibt sich hierfür $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Die anderen beiden Eigenwerte:

$$\begin{aligned} &\text{Falls } |\lambda| < 1 \quad \hat{=} \quad \text{exponentiell abfallende Populationsdynamik} \\ &\text{Falls } |\lambda| > 1 \quad \hat{=} \quad \text{exponentiell ansteigenden Populationsdynamik} \end{aligned}$$

zu entsprechenden Anfangswerten (Eigenvektoren).

Inverse Matrizen

- Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (\textit{Einheitsmatrix})$$
A^{-1} heißt Inverse von A.
- Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist, also vollen Rang besitzt: $Rang(A) = n$.
- Durch Kenntniss der Inversen lassen sich LGS einfach durch Matrix-Vektor lösen:
$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow \quad x &= (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \end{aligned}$$
Aber: Berechnung von A^{-1} ist i.a. aufwändiger als das Lösen eines LGSs.
- Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$
- Für eine reguläre Matrix A gilt
$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Berechnung von Inversen mittels Determinanten

- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so läßt sich die Inverse berechnen mittels der Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (-1)^{i+j} \det A'_{ij} \\ A^{-1} &= \frac{1}{\det A} C^T \end{aligned}$$

- Zur Berechnung der Inverse sind somit folgende Schritte notwendig:
  - Ersetze jeden Koeffizienten von A durch den entsprechenden Minor.
  - Multipliziere einiger Koeffizienten mit -1, wenn $i + j$ ungerade ist.
  - Transponiere die Matrix
  - Dividiere alle Koeffizienten durch $\det A$.
- Spezialfall $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel einer 3×3 Inversen

- Wir wollen die Inverse berechnen von:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2+4) + (-1+8) = 1$$

- Die Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Damit erhalten wir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Kap. 7: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignisse

- **Definition:** Unter einem Elementarereignis verstehen wir ein nicht genau voraussagbares Ergebnis eines Experimentes. Die Menge der Elementarereignisse bezeichnet man als Ereignisraum Ω. Jedem Elementarereignis a ordnen wir eine Wahrscheinlichkeit $P(a) \in [0, 1]$ zu.
- **Beispiele:**
  (i) Ereignisse beim einmaligen Werfen einer Münze: Kopf (K), Zahl (Z):

$$\Omega = \{K, Z\} \qquad P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$$

(ii) Zweimaliges Werfen mit Reihenfolge:

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\} \qquad P(a) = \frac{1}{4} \quad \forall a \in \Omega$$

(iii) Werfen von zwei ununterscheidbaren Würfeln:

$$\Omega = \{KK, ZK, ZZ\} \qquad P(KK) = P(ZZ) = \frac{1}{4}, \quad P(ZK) = \frac{1}{2}$$

Wahrscheinlichkeit

- Wir können ebenso Teilmengen aus Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnen:
  Beispiel:
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen zweier Münzen mindestens einmal *Kopf* dabei ist?

$$P(\{KK, ZK\}) \quad = \quad P(\{KK\}) + P(\{ZK\}) = \frac{3}{4}$$

- Daher fassen wir die Wahrscheinlichkeit P auf als Abbildung von der Menge aller Teilmengen von Ω, der sogenannten Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, in das Intervall $[0, 1]$:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

- Die Elemente von $\mathcal{P}(\Omega)$ nennen wir Ereignisse.
- Ist Ω endlich mit n Elementen, so besitzt $\mathcal{P}(\Omega)$ genau 2^n Ereignisse:

$$|\mathcal{P}(\Omega)| \quad = \quad 2^{|\Omega|}$$

- **Beispiel:** $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- Unter einem unmöglichen Ereignis versteht man ein $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $P(A) = 0$.
- Ein sicheres Ereignis ist dagegen ein $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $P(A) = 1$.

Forderungen an die Wahrscheinlichkeit

- Es gilt stets die **Normierung**:

$$P(\Omega) \quad = \quad 1$$

  Ω ist also ein sicheres Ereignis.

- **Additivität:** Sind zwei Teilmengen $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjunkt, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeit gerade die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Konstruktionsmöglichkeit

- Wenn Ω endlich ist: Wir ordnen jedem Elementarereignis $a \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $P(a)$ so zu, dass gilt:

$$\sum_{a \in \Omega} P(a) = 1$$

- Streng genommen müsste man eigentlich schreiben $P(\{a\})$ statt $P(a)$. Wir wissen aber was gemeint ist.

Biologische Beispiele

- **Genetik:** (i) Paarung zweier Individuen vom Genotypus AA und Aa. Die befruchteten Zellen sind vom Typ AA oder Aa:

$$\Omega = \{AA, Aa\}, \qquad P(AA) = P(Aa) = \frac{1}{2}$$

(ii) Paarung von Genotypus Aa und Aa:

$$\Omega = \{AA, Aa, aa\}, \qquad P(AA) = P(aa) = \frac{1}{4}, \quad P(Aa) = \frac{1}{2}$$

- **Bestrahlung** lebendigen Gewebes mit Röntgenstrahlen. Ergebnis: manchmal Mutationen. Bei Wiederholung des Experiments unter gleichen Bedingungen beobachtet man eine gewisse Häufigkeit an Mutationen.

$$\text{rel. Häufigkeit} \quad = \quad \frac{\text{abs. Häufigkeit}}{\text{Anzahl Experimente}}$$

Den Grenzwert (#Exp$\to \infty$) nennt man Mutationswahrscheinlichkeit.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

- Zu einem Ereignis A, heisst $\overline{A} = \Omega \setminus A$ das Gegenereignis von A. Für das Gegenereignis gilt stets:

$$P(\overline{A}) \quad = \quad 1 - P(A)\,,$$

denn $A \cup \overline{A} = \Omega$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

- Sich einander ausschliessende Ereignisse:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0$$

- Für voneinander unabhängige Ereignisse gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Teilmengen:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$$

- A "ohne" B:

$$P(A \setminus B) \quad = \quad P(A) - P(A \cap B)$$

Wahrscheinlichkeitsberechnung über das Gegenereignis

Beispiel Fernsehshow

- Sie befinden sich vor 10 Türen. Hinter einer von Ihnen steht der Hauptgewinn. Die übrigen 9 Türen sind Nieten.
- Sie wählen unter 10 Türen eine Tür aus.
- Nun öffnet der Showmaster von den übrigen 9 Türen genau 8, hinter denen sich jeweils nichts befindet (Nieten).
- Es bleiben also genau zwei geschlossen, darunter eine die Sie gewählt haben.
- Ihnen wird nun noch einmal die Möglichkeit gegeben, ihre Wahl zu ändern.

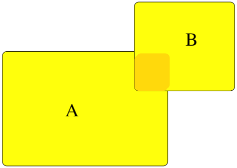
Wechseln Sie ?

$$\begin{aligned} A &= \text{Hauptgewinn hinter ursprünglich gewählter Tür} \\ B &= \text{Hauptgewinn hinter anderer (noch geschlossener) Tür} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ohne Wechseln:} \quad P(A) &= \frac{1}{10} \\ \text{Mit Wechseln:} \quad P(B) &= P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Additionstheorem

$$P(A \cup B) \;=\; P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Beispiel: Ziehen zweier Karten aus einen Skatblatt (32 Karten) mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mind. ein *Pik* dabei ist ?
$A =$ erste Karte Pik, $B =$ zweite Karte Pik

1. Möglichkeit mittels Additionstheorem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

2. Möglichkeit über das Gegenereignis $\overline{A \cup B}$ (kein *Pik* dabei):

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{(Morgan'sche Regel)} \\ P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- **Szenario:** Die Wahrscheinlichkeit für die Genotypen GG, Gg und gg sei für eine gewisse Tierpopulation 0.4, 0.5 und 0.1. Das Gen g (dicke Nase) sei rezessiv. Bei einem gewissen Tier beobachtet man keine dicke Nase.
- **Frage:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt dieses bestimmte Individuum den Genotyp GG ?
- Gefragt ist also nach $P(GG)$ unter der Voraussetzung, dass man gg bereits ausschliessen kann. Bezeichnung:

$$A = \{GG\} \qquad B = \{GG, Gg\}$$

- Obiges Ereignis bezeichnet man mit $A|B$, gelesen "A unter der Bedingung B"; gefragt ist also nach $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hier ergibt sich z.B.
$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)/P(B) = 0.4/0.9 \approx 0.44$.

Beispiel 1 - Sterbewahrscheinlichkeiten

Ereignis	Alter	Sterbewahrsch.
A_1	bis 20	0.0315
A_2	20-40	0.0277
A_3	40-60	0.1226
A_4	60-80	0.5162
A_5	> 80	0.3020

- Wahrscheinlichkeit, dass eine 40-jährige Person mind. 80 wird ?
- D.h. bereits eingetreten ist das Ereignis:

$$B = \{\text{Tod nach dem 40. Geb.}\} = A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

- Gefragt ist nach

$$P(A_5|B)$$

- Nach dem Multiplikationstheorem

$$P(A_5|B) = \frac{P(A_5 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.302}{0.1226 + 0.5162 + 0.302} \approx 0.321$$

Beispiel 2 - Geburtstagsgeschenke

- Sie möchten Gebutstagsgeschenke für die zwei Kinder eines Freundes kaufen. Sie wissen, dass auf jeden Fall ein Kind ein Junge ist. Sie wissen aber nicht, ob beides Jungen sind oder nicht.

$$P(JJ) = P(JM) = P(MJ) = P(MM) = \frac{1}{4}$$

Gefragt ist nach

$$\begin{aligned} A &= \{JJ\} \qquad B = \{JJ, JM, MJ\} \\ P(A|B) &= P(A \cap B)/P(B) = \frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Wenn Sie zudem wüssten, dass das **erste** Kind ein Junge ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} C &= \{JJ, JM\} \\ P(A|C) &= P(A \cap C)/P(C) = \frac{1}{4}/\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abzählen

- In einigen Situationen läßt sich die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit $P(A)$ darauf zurückführen abzuzählen, wieviele Elemente Ω und wieviele A hat. Denn wenn für alle $a \in \Omega$ gilt $P(a) = 1/|\Omega|$, so folgt

$$P(A) \quad = \quad \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem Skatblatt alle 4 Buben bekommt,
  - Die Reihenfolge der Karten ist unwichtig
  - Jede 10er Kartenkombination ist gleich wahrscheinlich.
  - $|\Omega|$ ist die Anzahl vom Möglichkeiten 10 Karten aus 32 auszuwählen,
  - $|A|$ ist die Anzahl vom Möglichkeiten 6 Karten aus 28 auszuwählen (denn die anderen vier sind ja gerade die Buben)

$$P(A) \quad = \quad \frac{|6 \text{ aus } 28|}{|10 \text{ aus } 32|}$$

Permutationen

- Unter einer Permutationen versteht man die Auswahl von k Objekte aus insgesamt n, wobei die Reihenfolge der Auswahl wichtig ist.
- Dies entspricht dem Setzen von k Objekten auf n unterscheidbare Plätze.
- Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

  solcher Permutationen.
- **Begründung:** Für das erste Objekt besitzt man n Möglichkeiten; für das zweite nur noch $n-1$, usw.
- Speziell im Fall $k = n$, gibt es $n!$ Permutationen (es gilt $0! = 1$).
- **Beispiel:** Auf wieviele Arten lassen sich “Wörter” mit 4 Buchstaben aus den Buchstaben A bis Z (26 Symbole) bilden, wobei jeder Buchstabe nur höchstens einmal vorkommen darf:

$$|\Omega| \quad = \quad \frac{26!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$$

  Wahrscheinlichkeit, dass der erste Buchstabe ein A ist: $|A| = 25 \cdot 24 \cdot 23$, $P(A) = \frac{1}{26}$.

Kombinationen

- Eine Kombinationen ist vergleichbar mit einer Permutation, wobei die Reihenfolge der Auswahl aber nicht wichtig ist.
- Die Anzahl an Kombinationen entspricht der Anzahl an Möglichkeiten, k Objekte aus insgesamt n gleichzeitig auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Sprechweise: "n über k" oder "k aus n".
- **Begründung:** Diese Anzahl entspricht gerade der entsprechenden Anzahl von Permutationen geteilt durch die Anzahl an Möglichkeiten, k Objekte anzuordnen.
- Die Anzahl an Kombinationen entspricht den Binomialkoeffizienten:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beispiele

- Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Bridgeblatt (13 aus 52 Karten) genau 7 Piks enthalten sind ?
- Gesamtanzahl an Bridgeblättern:

$$|\Omega| = \binom{52}{13}$$

- Davon Anzahl Möglichkeiten, 7 Piks und 6 nicht-Piks zu erwischen:

$$|A| = \binom{13}{7} \cdot \binom{52-13}{6}$$

- Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\binom{13}{7} \cdot \binom{39}{6}}{\binom{52}{13}} = \frac{13!}{7!6!} \frac{39!}{6!33!} \frac{13!39!}{52!}$$

$$= \frac{11 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 39^2}{23 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 700} = 0.088166$$

Beispiel: 6 aus 49

- Wahrscheinlichkeit 6 Richtige im Lotto zu haben:

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= \binom{49}{6}, \quad |A| = 1 \\
P(A) &= \frac{6!43!}{49!} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 1 : 14\,\text{Mio.}
\end{aligned}
$$

- Wahrscheinlichkeit 5 Richtige im Lotto zu haben:

$$
\begin{aligned}
|B| &= \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 \\
P(B) &= \frac{6 \cdot 43}{13\,983\,816} \approx 1 : 54\,200
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel:

- Ein Bäcker mische unter die 480 frischen Brötchen 20 vom Vortag.
- Wie groß ist die W., dass man mind. ein altes Brötchen bekommt, wenn man 5 Stück kauft ?

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= \binom{500}{5} \\
|\overline{A}| &= \binom{480}{5} \\
P(A) &= 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{480!}{5!475!} \frac{5!495!}{500!} \\
&= 1 - \frac{476 \cdots 480}{496 \cdots 500} \approx 18.5\%
\end{aligned}
$$

- Alternativ:

$$
\begin{aligned}
B_i &= \{i\text{-tes Brötchen frisch}\} \\
P(B_1) &= \frac{480}{500}, \qquad P(B_2|B_1) = \frac{479}{499}, \qquad \ldots \\
P(\overline{A}) &= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdots P(B_5|B_1 \cup \cdots \cup B_4) = \frac{480}{500} \frac{479}{499} \cdots \frac{476}{496}
\end{aligned}
$$

Kombinatorische Formeln

k **Objekte aus** n **auswählen:**

	mit Rücklegen	ohne Rücklegen
in Reihenfolge	n^k	$n!/(n-k)!$
ohne Reihenfolge		$\binom{n}{k}$

k **Objekte auf** n **Plätze plaziereren:**

	mit Mehrfachbelegung	Einfachbelegung
unterscheidbar	n^k	$n!/(n-k)!$
nicht unterscheidbar		$\binom{n}{k}$

Biologisches Beispiel

- Die Mutationswahrscheinlichkeit eines Gens sei $2.5 \cdot 10^{-7}$ je Strahlungseinheit. Wie groß ist die W., dass bei 10^4 Genen mind. eien Mutation auftritt.
- Über das Gegenereignis:

$$P(\overline{A}) \quad = \quad (1 - 2.5 \cdot 10^{-7})^{(10^4)}$$

- Approximation durch die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = (1+x)^s$ an der Stelle 0:

$$\begin{aligned} f(1+x) \,=\, (1+x)^s \quad &\approx \quad f(0) + xf'(0) \,=\, 1 + xs \\ P(\overline{A}) \quad &\approx \quad 1 - 2.5 \cdot 10^{-7} 10^4 \,=\, 1 - 2.5 \cdot 10^{-3} \,=\, 0.9975 \end{aligned}$$

Die W. beträgt also $P(A) \approx 0.0025 = 0.25\%$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse mit 25 Schülern alle Schüler an verschiedenen Tagen Geburtstag haben ?
- Gesamtanzahl der Möglichkeiten an Geburtstagen: $|\Omega| = 365^{25}$
- Gesamtanzahl der Möglichkeiten an Geburtstagen ohne Mehrfachbelegung:

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{365!}{(365-25)!} \\ P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{365!}{(365-25)!365^{25}} \end{aligned}$$

- Da sich dies aufgrund der großen Zahlen schwer ausrechnen läßt, machen wir folgende Umformung mit $k = 25$ und $n = 365$:

$$P(A) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)$$

Nun machen wir die Approximation $1 - x \approx \exp(-x)$ für kleines $|x|$:

$$P(A) \approx \exp(0) \cdots \exp\left(\frac{n-r+1}{n}\right) = \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{-i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{-i}{n} = -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k-1} i = -\frac{1}{n} \frac{(k-1)k}{2} = -\frac{600}{730}$$

Also $P(A) \approx \exp(-60/73) \approx 44\%$.

Permutationen mit gleichen Elementen

- Anzahl Möglichkeiten n Elementen in k Gruppen mit jeweils n_j Elementen einzuteilen:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$$

- **Beispiel:** Anzahl Möglichkeiten 24 Spieler in 2 Mannschaften á 11 Spieler und 2 Nicht-Spielern einzuteilen:

$$\frac{24!}{11!\,11!\,2!}$$

Binomialverteilung

Gegeben sei ein Zufallsexperiment:

- Bei dem wir nur zwischen Erfolg und Mißerfolg unterscheiden:

$$P(\text{"Erfolg"}) = p \qquad P(\text{"Mißerfolg"}) = q = 1 - p$$

- Bei Wiederholung des Experimentes, sei die Wahrscheinlichkeit stets dieselbe (unabhängige Experimente).

In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k, in n Versuchen genau k-mal Erfolg zu haben:

$$P(A_k) \;=\; \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Die Folge der A_k heißt Binomialverteilung.

Beispiel: Die W., das man bei 5-maligem Würfeln genau 2-mal eine "Sechs" würfelt beträgt:

$$P(\text{"2 Sechser"}) \;=\; \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 15\frac{5^4}{6^6} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 20\%$$

Ein pharmalogisches Beispiel

- Bei einem bestimmten Medikament gehe man von einer W., dass eine Nebenwirkung von 3% aus.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei 10 zufällig ausgewählten Patienten mind. bei einem Nebenwirkungen auf?

$$\begin{aligned} \text{Gegenereignis} \quad P(A_0) &= \binom{10}{0} 0.03^0 0.97^{10} = 0.97^{10} \\ P(A_1 + \cdot A_{10}) &= 1 - P(A_0) \approx 26\% \end{aligned}$$