

9. Übung zur Mathematik für Biologen 1 (WS 2005/06)

Dieses Aufgabenblatt dient als Kurzfassung einer Probeklausur und sollte daher in 90 Minuten bearbeitet werden. Die abgegebenen Blätter werden korrigiert, die Bewertung fließt aber nicht in die Gesamtnote ein.

Aufgabe 9.1:

(20 Punkte)

Man gebe kurze Antworten auf folgende Fragen (ohne Begründung):

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent?
2. Wie lautet das Quotientenkriterium für Reihen?
3. Was besagt der Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$?
4. Wie ist die Exponentialfunktion $\exp(x)$ definiert?
5. Wie lautet die Funktionalgleichung für den Logarithmus?
6. Wie ist die Ableitung einer Funktion in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ (formal) definiert?
7. Wie lautet der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
8. Wie lautet die Taylorentwicklung einer 5-mal stetig differenzierbaren Funktion im Punkt x ?
9. Man gebe eine Stammfunktion von $\ln x$ an.
10. Für all welche $s \in \mathbb{R}$ ist $\int_0^1 x^s dx$ wohldefiniert?

Aufgabe 9.2:

(8 Punkte)

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren (Grenz-) Wert:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 20}{n^4 - 3n + 1}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-2n)^{n+1}}$

Aufgabe 9.3:

(9 Punkte)

Man berechne die Ableitungen folgender Funktionen:

- a) $f(x) = e^{(e^x)}$ b) $g(x) = \sin^2(x)$ c) $h(x) = h_0 \exp(-a \exp(-kx))$

Aufgabe 9.4:

(6 Punkte)

Man berechne folgende Integrale:

$$\text{a) } \int_1^3 \frac{4x^3 - x^2}{x^3 - 3x^4} \quad \text{b) } \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

Aufgabe 9.5:

(9 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Geben Sie Kriterien für m, n und $\text{rang}(A)$ an, um jeweils folgende Eigenschaften zu gewährleisten:

- a) A ist bijektiv.
- b) A ist injektiv.
- c) A ist surjektiv.

Abgabe: Di., den 10. Januar 2006, vor der Vorlesung.