

7. Übung zur Mathematik für Biologen 1 (WS 2005/06)

Aufgabe 7.1: (2 Punkte)

Das Hooksche Gesetz beschreibt die Spannkraft F einer Feder in Abhängigkeit des Betrages der Ausdehnung s , $F(s) = ks$, mit einer Konstanten $k > 0$. Bestimmen Sie die Energie, die benötigt wird, um die Feder von $s = 0$ auf $s = s_0$ zu dehnen, sowie die Kraft, um von $s = s_0$ auf $s = 2s_0$ zu dehnen.

Aufgabe 7.2: (4 Punkte)

Man bestimme eine Treppenfunktion $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx \geq T_n := \int_1^n t(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$.

Aufgabe 7.3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) dx \\ (b) \quad & \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx \\ (c) \quad & \int_{\pi}^{3\pi} \frac{dx}{\sin(x/8) \cos(x/8)} \end{aligned}$$

Hinweis zu (c): Die Ableitung von $\tan(x)$ ist $\cos^{-2}(x)$.

Aufgabe 7.4: (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass im Intervall $(-1, 1)$ die Funktion

$$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right)$$

eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ ist.

(Hinweis: man setze $g'(x) = 1$ und nutze, dass $\arcsin x$ eine Stammfunktion von $(1-x^2)^{-1/2}$ ist.)

(b) Man berechne unter Nutzung von (a) die Fläche des Einheitskreises

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Abgabe: Di., den 13. Dezember 2005, vor der Vorlesung.