

6. Übung zur Mathematik für Biologen 1 (WS 2005/06)

Aufgabe 6.1:

(6 Punkte)

Zu $0 \leq \lambda < 1$ betrachten wir die Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} (1 - \lambda \cos \theta)$$

Dieses f beschreibt den Strömungswiderstand bei der Verzweigung eines Blutgefäßes in Abhängigkeit des Winkels θ . Der Parameter λ stellt hierbei das Verhältnis der Radien der beiden Blutgefäße zur Potenz 4 dar ($\lambda = (r_2/r_1)^4$).

- (i) Man berechne die erste und zweite Ableitung dieser Funktion.
- (ii) Man bestimme ein lokales Minimum.
- (iii) Wie lautet der Winkel, bei dem der Strömungswiderstand global minimiert wird?

Aufgabe 6.2:

(5 Punkte)

(a) Man berechne die Taylorentwicklungen der Funktion $\cos(x)$ an der Stelle $x = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Approximation der zweiten Ableitungen durch den Differenzenquotienten

$$D_h^{(2)} f(x) := \frac{1}{h^2} (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))$$

für eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$|f''(x) - D_h^{(2)} f| \leq \frac{1}{12} h^2 \sup_{y \in (a,b)} |f^{(4)}(y)|$$

Aufgabe 6.3:

(6 Punkte)

Man bestimme Stammfunktionen zu folgenden Funktionen in ihrem jeweiligem Definitionsbereich:

- (a) \sqrt{x}
- (b) $\frac{2}{5\sqrt[4]{x}}$
- (c) $\frac{1}{\cos^2(x)}$

Abgabe: Di., den 6. Dezember 2005, vor der Vorlesung.