Aufgabe 1

Die Lösungsvorschläge sollten ausreichen. Falls nicht, sollte man sich die Begriffe *Lokales / Globales Minimum (Maximum)* ansehen und dabei auch das Thema *Randextrema*!

Aufgabe 2

(a) Ansatz: Schreibe cos(0) und alle seine Ableitungen an dieser Stelle hin. Klingt schlimm, ist aber einfach, denn die Ableitungen sind periodisch und nacheinander -sin, -cos, sin und wieder cos usw.

Der Sinus von Null ist immer Null, der Cosinus immer 1. Setzt man das in die allgemeine Taylorentwicklung mit $x_0 = 0$ ein, so ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} cos^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!}$$

Dann erkennt man, dass die Summanden bei ungeradem k verschwinden. Dann heisst die Summe ja schon

$$\sum_{k=0}^{\infty} cos^{2k}(0) \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Dann erkennen wir noch, dass eben diese cos-Ableitungen alternierend ± 1 sind und wir ersetzen sie: $cos^{(2k)}(0) = (-1)^{2k}$. Dann haben wir die Lösung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(b) siehe die Lösungsvorschläge.

Aufgabe 3

(a) und (b) sind elementar lösbar, man sehe dazu die Lösungsvorschläge ein!

(c) Wie man hier auf die Lösung kommt, kann ich wie folgt motivieren.

Der vorgegebene Bruch $\frac{1}{cos^2(x)}$ würde durch Ableiten meines Integrals entstehen, das sagt mir der *Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.*

Der Bruch erinnert an das, was herauskommt, wenn man eine Funktion $\frac{u(x)}{v(x)}$ nach der Quotientenregel ableitet. Dann nämlich wäre die Lösung $\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Nun haben wir oben aber nur eine Eins stehen. Unten steht dann $v(x) = cos(x)$. Das heisst, es sollte gelten:

$$1 = u'(x)cos(x) - u(x)cos'(x) = u'(x)cos(x) - u(x)(-sin(x)) = u'(x)cos(x) + u(x)sin(x)$$

Mir fällt dann zwar nur $sin^2 + cos^2 = 1$ ein, aber das ist die Lösung! u muss der Sinus sein (womit die Ableitung $u' = cos(x)$ auch passt) und damit ist eine Stammfunktion $sin(x)/cos(x) = tan(x)$.