Aufgabe 1

Wir rechnen das mal für (ii) durch. Wie Ihr wisst, ändert sich die Determinante unter elementaren Zeilenumformungen nicht. Also kann man die Matrix einfach auf Dreiecksform bringen und die Hauptdiagonalelemente miteinander multiplizieren. Man kann... Einfacher ist es oft, nach Spalten oder Zeilen zu entwickeln. Wie das geht, seht Ihr jetzt:

Wir entwickeln erstmal nach der letzten Spalte.

$$det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt nach der ersten Zeile:

$$2 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obwohl wir nach Sarrus das schon einfach ausrechnen könnten, ziehen wir unser Schema weiter durch: Wir nehmen uns die letzte Zeile vor:

$$2 \cdot (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} = -4 \cdot (3 \cdot (-1) - 9 \cdot 2) = -4 \cdot (-21) = 84.$$

Wobei wir auch hier noch die letzte $(2x2)$-Matrix entwickeln können. Aber das ist trivial. Trotzdem fürs Schema ausführlich (man beachte: hier gibt es keine Nuller, also haben wir eine Summe!):

$$det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot det(-1) + 2 \cdot det(9) = -3 + 18 = 21.$$

Denn so weit sollte man auch denken; einfache Zahlen, beispielsweise die reellen, bilden ja auch einen Vektorraum, halt einen (langweiligen) eindimensionalen. Und eine einfache Zahl kann man als $(1x1)$-Matrix auffassen mit der Eigenschaft $det(1x1 - Matrix) = det(Zahl) = Zahl\ selbst...$

Aufgabe 2

Da wir uns an nichts aus dem Skript erinnern, müssen wir uns alles überlegen. Das ist aber leicht! Wir machen folgende Vorüberlegungen: Wir haben vier verschiedene Gruppen, deren Anzahlen wir zur festen Zeit n mit $w_n,\ x_n,\ y_n,\ z_n$ bezeichnen wollen. Das ist natürlich willkürlich!

Was passiert in diesem (w, x, y, z)-System?! In jedem Altersschritt rutschen die vorherigen Zahlen irgendwie durch, als Anschauung sterben zum Beispiel einige Individuen (oder sie werden rauspipettiert). Fassen wir diese (w, x, y, z)-Klammer einmal als einen Populationsvektor auf. Dann wird in jedem Altersschritt nach derselben Vorschrift durchgereicht (geboren, gealtert, gestorben). In unserer vierdimensionalen Altersstrukturwelt entspricht das einer Multiplikation mit einer Matrix und die sieht so aus:

$$M := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das ist klar, denn diese Matrix macht mit einem Zierervektor $(w, x, y, z)^t$ folgendes:

Nach der Multiplikation steht im ersten Eintrag (nennen wir ihn w') die Summe der Geburten, im zweiten Eintrag x' die Neugeborenen multipliziert mit der Überlebenswahrscheinlichkeit von 20% usw. Jetzt steht alles im Lösungsvorschlag.

Dazu gibt es noch zu sagen, dass die Lösung eines Polynoms vierten Grades noch exakt berechenbar ist und zwar mit den Cardanoschen Formeln. Dazu braucht man aber eventuell komplexe Zahlen!

Aufgabe 3

Die Musterlösung reicht hier sicherlich. Ein anderes Schema ist das folgende: Man schreibe die gegebene Matrix M hin und die Einheitsmatrix I daneben. Dann wandele man M mit Zeilen- und Spaltenumformungen in I um. Diese Operationen wende man auch auf I an. Diese ändert sich dadurch und wird - (k)ein Wunder - zu M^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren in beiden Matrizen die ersten Zeilen mit $(-1/2)$ und die zweiten teilen wir durch 5. Also ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um der Einheitsmatrix näher zu kommen, vertauschen wir die zweite mit der dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt befassen wir uns mit der zweiten Zeile: Wir ziehen die erste ab und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Gut. Die Zeile wird auch noch normiert. Also mit 2/5 multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir oberhalb der Hauptdiagonalen Nullen erzeugen, also addieren wir zur zweiten Zeile das (1/5)-fache der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/25 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist die erste Zeile dran. Wir addieren das halbe der dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 1/25 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Auf die Einheitsmatrix kommen wir nun leicht; einfach das 3/2-fache der zweiten addieren und schließlich ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/5 & 4/25 & 3/5 \\ 1/5 & 1/25 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Die rechte Matrix ist wirklich die Inverse, man überzeuge sich mittels Matrixmultiplikation!