Aufgabe 1

$$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (= \operatorname{Sp} J)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

a)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \vec{f} = 3, \quad \operatorname{rot} \vec{f} = 0$$

b)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1/x_2 & 0 \\ \frac{x_2 \cancel{x_3}}{\sqrt[3]{x_1^2 x_2^2} \cdot 3} & \frac{x_1}{3\sqrt[3]{x_1^2 x_2^2}} & 0 \\ -\frac{x_1}{|\vec{x}|^3} & -\frac{x_2}{|\vec{x}|^3} & -\frac{x_3}{|\vec{x}|^3} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \cancel{0} \frac{x_1}{3\sqrt[3]{x_1^2 x_2^2}} - \frac{x_3}{|\vec{x}|^3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(-\frac{x_2}{|\vec{x}|^3}, \frac{x_1}{|\vec{x}|^3}, \frac{x_2}{3\sqrt[3]{x_1^2 x_2^2}} - \frac{1}{x_2} \right)$$

Aufgabe 1

c)

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3 & 0 \\ \frac{x_1 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} & \frac{x_2 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} & \frac{x_3 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = 3x_1 + \frac{x_2 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(-\frac{x_3 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \; , \; -x_3 \; , \; \frac{x_1 e^{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} - 3 \right)$$

Aufgabe 2

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1^2 + 3x_2 \\ e^{|\vec{x}|} \\ x_1 x_3 + 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- analytisch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\sqrt{2}} \\ 4 \end{pmatrix}$$

- 1. Näherung für $\vec{x}_0 = (0, 1, 1)$

$$\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ e^{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J für $\vec{x}_0$ berechnet, weil Entwicklung um $\vec{x}_0$

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + J\,\Delta\vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ e^{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}} \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{für } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

- 2. Näherung für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ e^{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ e^{\sqrt{2}}/\sqrt{2} & e^{\sqrt{2}}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + J \Delta \vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ e^{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}} \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Berechne Abstände:

1. Näherung $\quad |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}_1(\vec{x})| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2} e^{2\sqrt{2}}}$

2. Näherung $\quad |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}_2(\vec{x})| = \sqrt{\frac{1}{2} e^{2\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow$ Abstand zwischen Näherung und analytischer Lösung ist für $\vec{x}_0 = (1,1,0)$ besser.

Aufgabe 3

$$A \to B \to D, \qquad A \to C \to D$$

c_i : Konzentrationen

a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \\ c_C \\ c_D \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\vec{c} = J\,\vec{c} \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} -r_{AB}-r_{AC} & 0 & 0 & 0 \\ r_{AB} & -r_{BD} & 0 & 0 \\ r_{AC} & 0 & -r_{CD} & 0 \\ 0 & r_{BD} & r_{CD} & 0 \end{pmatrix}$$

Reaktionsraten: $k := r_{AB}$

dann
$r_{BD} = 2k$
$r_{AC} = 3k$
$r_{CD} = 3k$

b) Eigenwerte: $|J - \lambda E| = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = (-r_{AB} - r_{AC} - \lambda)(-r_{BD} - \lambda)(-r_{CD} - \lambda)\,\lambda$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -(r_{AD} + k_{AC}) &&= -4k \\ \lambda_2 &= -r_{BD} &&= -2k \\ \lambda_3 &= -r_{CD} &&= -3k \\ \lambda_4 &= 0 &&= 0 \end{aligned}}$$

Aufgabe 3

Eigenvektoren:

Zu lösendes Gleichungssystem:

I $\quad (-4R - \lambda)\, c_A = 0$

II $\quad R\, c_A = (\cancel{R}\,\cancel{3R}\,2R + \lambda)\, c_B$

III $\quad 3R\, c_A = (3R + \lambda)\, c_C$

IV $\quad 2R\, c_B + 3R\, c_C = \lambda\, c_E$

λ_1: setze $c_A = 1 \qquad \lambda_1 = -4R$

II $\Rightarrow \quad c_B = -\frac{1}{2}$

III $\Rightarrow \quad c_C = -\cancel{\tfrac{3}{2}}\,3$

IV $\Rightarrow \quad c_E = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)$

$\quad = \cancel{4}\ \frac{10}{4}$

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \\ \boxed{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2R$

I $\Rightarrow c_A = 0$

setze $c_B = 1$

III ~~setze~~ $c_C = 0$

IV $\quad c_E = -\frac{2R}{2R} = -1$

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -3R$

I $\Rightarrow c_A = 0$

II $\Rightarrow c_B = 0$

setze $c_C = 1$

IV $\quad c_E = -1$

$$\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_4 = 0$

$c_A = 0,\ c_B = 0,\ c_C = 0$ setze $c_E = 1 \Rightarrow \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe ~~1~~ 4

$$V = \int_{V_K} dx\, dy\, dz$$

Kugel

wähle Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

$$dx\, dy\, dz = D\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & +r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\vartheta \cdot r^2 \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + \sin\vartheta\, r^2 \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\Big[\cos\vartheta\left(\cos\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi\right)$$
$$+ \sin\vartheta\left(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\Big]$$

$(\cos^2 + \sin^2 = 1)$ $$= r^2\left[\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \sin^3\vartheta\right]$$
$$= r^2\sin\vartheta$$

Aufgabe 4

$$\Rightarrow V = \int_{O} r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} R^3 \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{= \frac{4}{3}\pi R^3}}$$

Volumen der Kugel

Aufgabe 4

Zylinder wähle Zylinderkoordinaten

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = h$

$$dx\,dy\,dz = D\,dr\,d\varphi\,dh$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r$$

$$V = \int_{\text{Zyl}} dx\,dy\,dz = \int_{h=0}^{H}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r\,dr\,d\varphi\,dh$$

$$= \int_0^H dh \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r\,dr$$

$$\underline{V = \pi R^2 H}$$ Volumen des Zylinders