Aufgabe 1 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$$

- gesucht B mit

$$B^{-1} A B = A' \qquad \text{mit} \quad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$B^T A B = A'$$

- Bestimme Eigenwerte

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1{,}5^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1{,}75 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 1{,}75}$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3{,}5$$
$$\lambda_2 = 0{,}5$$

Ansatz: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

es gilt: Zeilen und Spalten sind orthonormiert

d.h. $\vec{b}_i \vec{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$ wenn $\vec{b}_i$ die i-te Zeile (oder Spalte) darstellt.

Aufgabe 1 (2)

$$a'_{11} = \sum_{k,l=1}^{2} b_{k1} a_{kl} b_{l1}$$

$$= b_{11}^2 a_{11} + 2a_{12} b_{11} b_{21} + b_{21}^2 a_{22}$$

$$= a_{11} \underbrace{(b_{11}^2 + b_{21}^2)}_{=1} + 2a_{12} b_{11} b_{21} \qquad \text{weil } a_{11} = a_{22}$$

$= 1$ weil Spalten ~~orthogonal sind~~ normiert sind

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1 - a_{11}}{2a_{12}} = b_{11} b_{21}$$

$$\text{I} \Rightarrow \quad b_{11} b_{21} = \frac{1}{2}$$

es gilt:

$$\text{III} \quad b_{11} b_{21} + b_{12} b_{22} = 0 \qquad \text{(Spalten orthogonal)}$$

$$b_{11}^2 + b_{21}^2 = 1 \qquad \text{(Spalten normiert)}$$

$$b_{12}^2 + b_{22}^2 = 1 \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

$$\Rightarrow \quad b_{11}^2 b_{21}^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = b_{21}^2 (1 - b_{21}^2)$$

$$0 = b_{21}^4 - b_{21}^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad b_{21}^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$\text{II} \quad \Rightarrow \quad \underline{b_{21} = \pm\sqrt{0{,}5}}$$

$$\text{I und II} \Rightarrow \quad \underline{b_{11} = b_{21}}$$

Aufgabe 1 (3)

es gilt:

$b_{11}^2 + b_{12}^2 = 1$ (Zeilen normiert)

$b_{21}^2 + b_{22}^2 = 1$ " "

$\Rightarrow \quad b_{12}^2 = 1 - 0{,}5$

$\underline{b_{12} = \pm\sqrt{0{,}5}}$

mit $\underline{\text{III}}$ folgt

$0{,}5 + b_{12} b_{22} = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{b_{22} = -b_{12}}$

bei b_{21} und b_{12} keine Einschränkungen bei Wahl des Vorzeichens. Wähle +.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{B = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} \checkmark$$

(Die Berechnung von a'_{12}, a'_{21} und a'_{22} gibt keine zusätzlichen Informationen zu b_{ij})

Aufgabe 2 (A)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 6}$$

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = 1$$

Eigenvektoren: löse $(A - \lambda_i E)\vec{x}_i = 0$

λ_1

$$\text{I} \quad (5-6)x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\text{II} \quad -2x_1 + (2-6)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{I}' \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

~~II' $x_1 + 2x_2 = 0$~~

wähle $x_1 = 2$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = (2, -1)$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = 6$

λ_2

$$(5-1)x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x_1 = 2x_2$$

wähle $x_1 = 1$

$\Rightarrow \vec{x}_2 = (1, 2)$ Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$

Aufgabe 2 (B)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} &\underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \\ &\underline{\underline{\lambda_2 = 1}} \end{aligned}\right\} \text{Eigenwerte}$$

Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1}$

$$(1-2)\,x_1 = 0$$

$$x_1 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_1 = (0,1)}}$$

$\underline{\lambda_2}$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_2 = (1,-1)}}$$

Aufgabe 2 (c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda)-9\right]=0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$\underline{\lambda_2 = 5}$$

$$\underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$$

Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1}$

$$\text{I} \quad (2-1)x_1 + 3x_2 = 0$$
$$\text{II} \quad 3x_1 + 2x_2 = 0$$
$$0\cancel{x_3} = 0$$

$$\text{I, II} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\underline{\underline{\vec{x}_1 = (0,0,1)}}$$

$\underline{\lambda_2}$

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

setze $x_1 = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_2 = (1,1,0)}}$$

$\underline{\lambda_3}$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

setze $x_1 = -1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_3 = (-1,1,0)}}$$

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$(a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + b^2}$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = a \pm b}}$$

Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1 = a + b}$

$$-bx_1 + bx_2 = 0$$

$$bx_1 - bx_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_1 = (1,1)}}$$

$\underline{\lambda_2 = a - b}$

$$bx_1 + bx_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_2 = (1,-1)}}$$

b) $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0 \Rightarrow$ orthogonal $\Rightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 4

$$B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A \vec{a}_i = \lambda_i \vec{a}_i$$

~~zu zeigen~~

Berechne: $B A B^T = A'$

$$B A B^T = B \underbrace{(\lambda_1 \vec{a}_1, \lambda_2 a_2, \ldots, \lambda_n \vec{a}_n)}_{n \times n \text{ Matrix mit Spalten } \lambda_i \vec{a}_i}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{weil} \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ B diagonalisiert A. ✓