Aufgabe 1

a) es gilt:

$$A A^{-1} = E \quad \text{und} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1}A = E$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1} A \vec{x} = A\vec{b}$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\sqrt{3}\alpha & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\alpha & 0 & \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{3}\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 & -\sqrt{2}\alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \frac{1}{2}$$

bestimme A^{-1}

$$\begin{array}{c|cccc|cccc}
\text{I} & \alpha & 0 & -\sqrt{3}\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\text{II} & 0 & -\sqrt{2}\alpha & 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\text{III} & \sqrt{3}\alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\text{IV} & 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 & -\sqrt{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Aufgabe 1 b)

$$\begin{array}{l|cccc|cccc}
I' = \frac{I}{\alpha} & 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\
II' = \frac{II}{\alpha} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\
III' = \frac{III - \sqrt{3}I}{\alpha} & 0 & 0 & 4 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\
IV' = \frac{IV + II}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc|cccc}
II'' = \frac{II'}{-\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{-\sqrt{2}\alpha} & 0 & 0 \\
III'' = \frac{III'}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4\alpha} & 0 & \frac{1}{4\alpha} & 0 \\
IV'' = \frac{IV'}{-2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc|cccc}
I''' = I' + \sqrt{3}\,III'' & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\alpha} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} & 0 \\
II''' = II'' - IV'' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} \\
III''' = III'' & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4\alpha} & 0 & \frac{1}{4\alpha} & 0 \\
IV''' = IV'' & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

($A^{-1} = A^T$ A ist orthogonal)

Aufgabe 1b)

$$A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}, -3\sqrt{2}, 1-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right)$$

Aufgabe 2

Gesucht ist die Matrix A mit $A\vec{x} = -\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

- Dies ist nur möglich für $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.
- $a_{ii} = -1$ für $i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow$ Matrix der Inversion

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Faktor λ ist für alle Vektoren $\vec{x}$ gleich -1. D.h. die abgebildeten Vektoren haben die gleiche „Richtung".

Aufgabe 3

$\vec{x} := (1,0,0)$

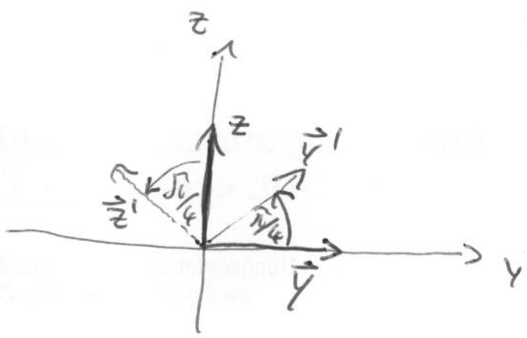
$\vec{y} := (0,1,0)$ allg. abgebildeter Vektor mit ' gekennzeichnet

$\vec{z} := (0,0,1)$

(A)

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\cos\frac{\pi}{4} - z\sin\frac{\pi}{4}\\ y\sin\frac{\pi}{4} + z\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}\,'$



$\Rightarrow$ A stellt ein Drehung um die x-Achse mit einem Winkel von $\frac{\pi}{4} = 45°$ dar.

$A \cdot A^T = E \Rightarrow$ A ist orthogonal, weil $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

(B)

$$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}\vec{x}\,' &= 2\vec{x}\\ \vec{y}\,' &= 2\vec{y}\\ \vec{z}\,' &= 2\vec{z}\end{aligned}$$

Jeder Vektor wird um den Faktor 2 gestreckt.

Es handelt sich nicht um Drehung, Spiegelung oder Inversion.

~~det B~~ $|B| = 8 \Rightarrow$ nicht orthogonal

Aufgabe 3

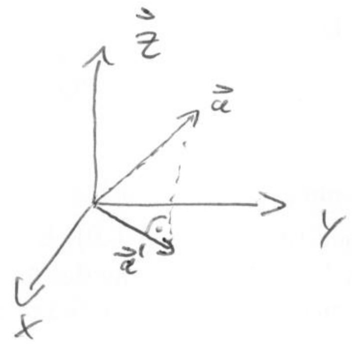
c)

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}'$

$\vec{y} = \vec{y}'$

$\vec{z}' = 0$



Alle Vektoren werden durch C auf die xy-Ebene projiziert, in dem die z Komponente 0 gesetzt wird. Keine Drehung, Spiegelung oder Inversion.

~~det~~ $|C| = 0 \Rightarrow$ nicht orthogonal

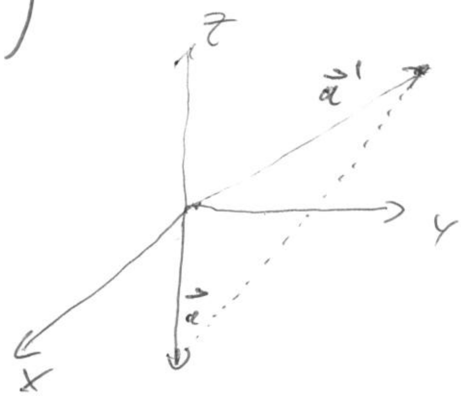
D)

$$D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\vec{x}' = -\vec{x}$

$\vec{y}' = \vec{y}$

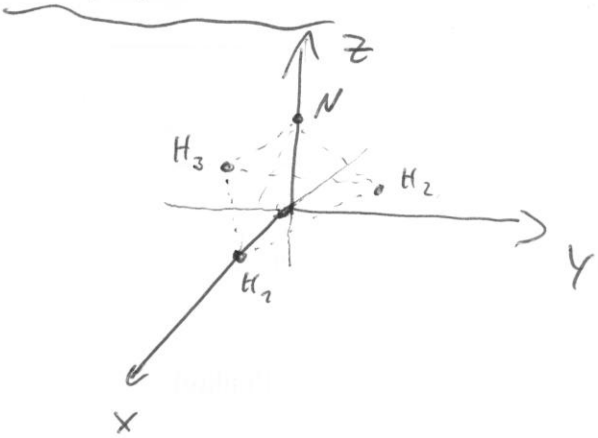
$\vec{z}' = \vec{z}$



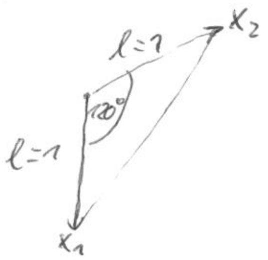
D ist die Abbildungsmatrix einer Spiegelung an der yz-Ebene

$D D^T = \mathbb{E} \Rightarrow$ D ist orthogonal

Aufgabe 4



a) Wasserstoffatome liegen in xy-Ebene jeweils im Winkel von 120° vom Koordinatenursprung aus betrachtet.



$\vec{x}_i$: Vektor des Atoms i

$\Rightarrow \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = x_i \, x_j \cos(120°)$ für $i \neq j$

$= \cos(120°)$ weil $x_i = x_j = 1$

$\Rightarrow \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{x}_1} \cdot \vec{x}_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ x-Komponente von $\vec{x}_2$ ist $-\frac{1}{2}$

- $|\vec{x}_2| = 1$ (gleicher Abstand zur z-Achse wie 1. Atom)

$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$

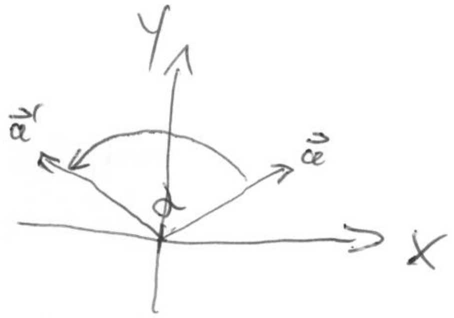
$z_2 = 0$, weil in xy-Ebene

$\Rightarrow y_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (1,0,0) \\ \vec{x}_2 &= \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ \vec{x}_3 &= \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \end{aligned}}$$

Aufgabe 4

b) Gesucht ist die Abbildung d_1, die die z-Komponente eines Vektors $\vec{a}$ konstant hält und die x,y Komponente dreht:



Die Teilmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sorgt für die Drehung in der xy-Ebene um den Winkel α.

Analog der Matrix A von Aufgabe 3 erhält man

$$\underline{\underline{d_1}} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$d_1 \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_2 \quad ✓$$

$$d_1 \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_3 \quad ✓$$

$$d_1 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_1 \quad ✓$$

d_1 bildet wie erwartet $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2$, $\vec{x}_2 \to \vec{x}_3$ und $\vec{x}_3 \to \vec{x}_1$ ab.

c) Spiegelung an der xz-Ebene bewirkt die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Analog D in Aufgabe 3 findet man

$$\underline{\underline{s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 4

d)

$$d_2 = d_1 \cdot d_1$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = e = d_2 d_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

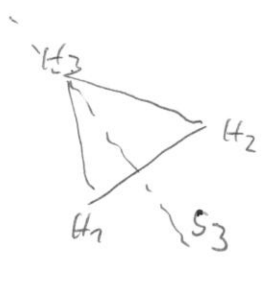
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$s_2 = s_1 d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d_1$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = S_1 d_2$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$s_3 \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_2 \checkmark \; ; \; S_3 \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_1 \checkmark \; ; \; S_3 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_3 \checkmark$$