Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

a)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ a & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

für $A^T = A^{-1}$ gilt:

$$A A^T = E$$

$$\Rightarrow \text{I} \quad \left(1/\sqrt{3}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \longrightarrow \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} a + 0 = 0$$

$$\text{II} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt{3}}}} \qquad \text{I} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad ✓$$

b) prüfe Spaltenvektoren $\vec{b}_i$:

orthogonal, wenn $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0 \quad ✓$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0 \quad ✓ \qquad \text{(gilt allgemein für } A^T A = E\text{)}$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0 \quad ✓$$

Aufgabe 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

überführe Matrix auf Dreiecksform

$$\begin{array}{llll} I & 3 & -1 & 1 \\ II & 7 & -1 & 9 \\ III & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} I' = I - 3\,III & 0 & -1 & -5 \\ II' = II - 7\,III & 0 & -1 & -5 \\ III' = III & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} I'' = I' - II' & 0 & 0 & 0 \\ II' & 0 & -1 & -5 \\ III' & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ größte nicht verschwindende Unterdeterminante hat Ordnung 2

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{rg\ A = 2}}$

b)

$$-\vec{b} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}$$

Da es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, sind genau 2 der 4 Vektoren linear abhängig und 2 unabhängig.

Aufgabe 3

Kramersche Regel für $A\vec{x} = \vec{b}$

(Cramersche Regel)

i.-te Spalte ersetzt durch $\vec{b}$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

für $|A| \neq 0$.

a)

$$x_1 + 4x_2 = 2$$
$$3x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-16}{1-12} = \frac{14}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{4-6}{-11} = \frac{2}{11}$$

b)

$$5x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 10$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 20$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 20 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{-4\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4(30-100)}{-4 \cdot 10} = -7$$

$$x_2 = \frac{-4\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 20 \end{vmatrix}}{-40} = 9$$

$$x_3 = \frac{10\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{8 + (-20)}{-4} = 3$$

Aufgabe 4

$$3x_1 + \alpha_1 x_2 = 2$$
$$4x_1 + x_2 = \alpha_2$$

Dies ist analog dem Gleichungssystem:

$$12x_1 + 4\alpha_1 x_2 = 8$$
$$12x_1 + 3\cancel{\alpha_1} x_2 = 3\alpha_2$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{8 - 4\alpha_1 x_2}{12}$

$\Rightarrow$ x_1 eindeutig bestimmt aus x_2

$$\Rightarrow (4\alpha_1 - 3)\, x_2 = 8 - 3\alpha_2$$

a) $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $0 x_2 = 0$

$\Rightarrow$ alle $x_2 \in \mathbb{R}$ sind Lösung

b) $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 \neq \frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $0 x_2 = \beta$ mit $\beta \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

c) $\alpha_1 \neq \frac{3}{4}$, α_2 beliebig $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{8 - 3\alpha_2}{4\alpha_1 - 3}$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung (x_2, x_1)