Aufgabe 1

$$\vec{r}(t) = (t^2, -2t, t^2+2t)$$

a) $P = (4, -4, 8)$

gesucht t' mit $\vec{r}(t') = P$

- aus y Komponente folgt $-4 = -2t'$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t' = 2}}$$

- teste Lösung durch Einsetzen

$$\vec{r}(t') = (2^2, -2 \cdot 2, 2^2 + 2^2)$$
$$= (4, -4, 8) \checkmark$$

Zum Zeitpunkt $t' = 2$ hält sich das Teilchen bei $(4, -4, 8)$ auf.

b)

$$\underline{\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = (2t, -2, 2t+2)}$$

$$\underline{\underline{\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = (2, 0, 2)}}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + (2t+2)^2}$$
$$= \sqrt{4t^2 + 4 + 4t^2 + 8t + 4}$$
$$= \sqrt{8t^2 + 8t + 8}$$
$$= 2\sqrt{2t^2 + 2t + 2}$$

$$\underline{\underline{v(t') = 7{,}48}}$$

$$\underline{\underline{a = |\vec{a}(t)| = 2{,}83}}$$ (unabhängig vom Zeitpunkt)

Aufgabe 2

a) $\text{grad}\,(x^3y^3z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) x^3y^3z$

$$= \underline{\underline{\left(3x^2y^3z,\ 3x^3y^2z,\ x^3y^3\right)}}$$

b) $\text{grad}\,(x^2y + \frac{1}{2}xyz + yz^2)$

$$= \underline{\underline{\left(2xy + \frac{1}{2}yz,\ x^2 + \frac{1}{2}xz + z^2,\ \frac{1}{2}xy + 2yz\right)}}$$

c) $\vec{\nabla}\left(\gamma m M \frac{1}{r}\right) = \gamma m M\, \vec{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

x-Komponente (analog für y, z)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla}\left(\gamma m M \frac{1}{r}\right) = \gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3}}}$$

d) $\text{div}\,(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{= 3}}$$

$\text{rot}\,(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (x, y, z)$

$\underline{\underline{= 0}}$, weil nur Terme $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j$ mit $i \neq j$ vorkommen

Aufgabe 2

e) $\underline{\text{rot}(y^2, z^2, x^2)} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x\right)$

$= (-2z, -2x, -2y)$

$\underline{\underline{= -2(z, x, y)}}$

$\underline{\underline{\text{div}(y^2, z^2, x^2) = 0}}$

f)

$$\text{div}\left(-\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\gamma m M \,\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= -\gamma m M \left(\frac{1}{r^3} \text{div}\,\vec{r} + \vec{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{r^3}\right)$$

$\text{div}\,\vec{r} = 3$ (siehe d)

x-Komponenten von $\vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$ (analog auch für y, z)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\frac{3}{2} \frac{2x}{r^5} = -\frac{3x}{r^5}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\text{div}\,\vec{F}(\vec{r})}} = -3\gamma m M \left(\frac{1}{r^3} - \frac{\vec{r}^2}{r^5}\right) \underline{\underline{= 0}}$ (keine Quellen)

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla}\left(\gamma m M \frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \gamma m M \frac{1}{r}$$

$\underline{\underline{\text{rot}\,\vec{F} = 0}}$ (keine Wirbel)

Aufgabe 3

$$F(x,y,z) = x^2 y + \frac{1}{2} xyz + yz^2$$

a) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \cdot F$

b) Divergenz ist nur für Vektorfelder definiert

↳ nicht berechenbar

c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} F) = \Delta F$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F$$

$$= 2y + 2y$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} F) = 4y}}$

d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times F)$ Rotation nur für Vektorfelder definiert

↳ nicht berechenbar

Aufgabe 4

$$T(x,y) = \frac{T_0}{4+x^2-2x+2y^2+4y}$$

a) • grad T zeigt in Richtung des Temperaturanstiegs

$$\text{grad}\, T = \left(\partial/\partial x, \partial/\partial y\right) \frac{T_0}{4+x^2-2x+2y^2+4y}$$

$$= -\frac{T_0}{(x^2-2x+2y^2+4y+4)^2}(2x-2, 4y+4) = -\frac{T_0}{(x-1)^2+2(y+1)^2+1}\begin{pmatrix}2x-2\\4y+4\end{pmatrix}$$

• im Maximum / Minimum: grad $T=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ 4y+4=0 \end{array}\right\} \text{denn } 0 < \frac{T_0}{(x-1)^2+2(y+1)^2+1} < \infty$$

$\Rightarrow$ Extremum bei $\underline{\underline{x=1,\ y=-1}}$

• Setzt man große Werte für x, y ein, so findet man, dass der Gradient von T immer in Richtung von $P(1,-1)$ zeigt.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T(1,-1) \text{ ist ein Maximum}}}$

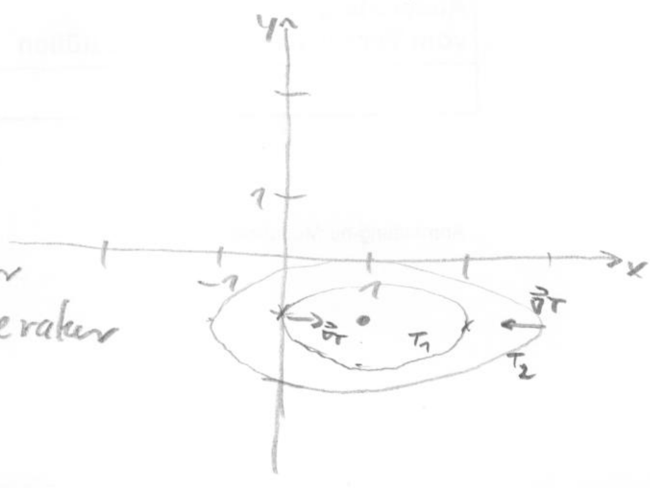
• $\underline{\underline{T(1,-1) = T_0}}$ Maximaltemperatur

• $$T_c = \frac{T_0}{(x-1)^2+2(y+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+2(y+1)^2 = \frac{T_0}{T_c}-1$$

• Ellipsengleichung für Linien gleicher Temperatur

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{T_0}{T_c}-1} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{T_c}-1\right)} = 1}$$



Aufgabe 4

b) $T(2,1) = \frac{T_0}{1^2 + 8 + 1} = \frac{T_0}{10}$

$\operatorname{grad} T(2,1) = -\frac{T_0}{10^2}(2,8)$

$\Rightarrow$ Temperaturanstieg in Richtung $(1,4)$

$\Rightarrow$ Temperaturgefälle (stärkste) in $\underline{-(1,4)\text{ Richtung}}$