Aufgabe 1

· Skalarprodukt in n Dimensionen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

· Länge eines Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

a)

$\vec{b} = (1, 2, 3, 4, 5)$

$\vec{v} = (5, 4, 3, 2, 1)$

$\vec{e} = \vec{b} - \vec{v} = (-4, -2, 0, 2, 4)$ Vektor vom Vogel -> Beobachter

$|\vec{e}| = \sqrt{2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2}$

$\underline{\underline{e = 6{,}32}}$ Entfernung zwischen Vogel und Beobachter

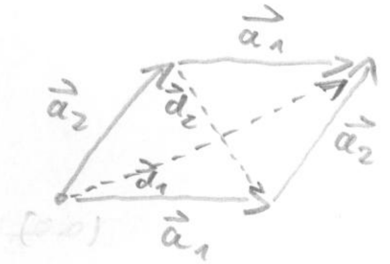
b) $\vec{v}\,\vec{b} = v\,b \cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{v}\,\vec{b}}{v\,b} = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3^2}{2 \cdot \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}^{\,2}} = \frac{35}{55}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 50{,}48^\circ}}$ Winkel von Vogel und Beobachter aus Sicht der Katze.

Aufgabe 2

a)



$$\vec{d}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$d_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

mit $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$

$$\vec{d}_1 \circ \vec{d}_2 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

$$= a_1^2 - \vec{a}_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = d_1 d_2 \cos \alpha$$

für ein Parallelogramm ist $d_1, d_2 > 0$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2}}$$

Aufgabe 2

b) zu zeigen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

Skalarprodukt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\gamma$

$$c^2 = \vec{c} \circ \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = b^2 - 2\vec{a}\vec{b} + a^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Aufgabe 3

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$C = AB \quad , \quad D = BA$

$$\underline{\underline{C = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}}} \qquad \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$C = AB \quad , \quad D = BA$

$$\underline{\underline{C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 33 \\ 25 & 56 & 105 \\ 29 & 50 & 81 \end{pmatrix}}} \qquad \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 82 & 74 \\ 79 & 72 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 49 \\
\mathrm{II} & 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 98 \\
\mathrm{III} & x_1 + 3x_2 + x_3 = 147
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 49 \\
\mathrm{II}' = \mathrm{II} - 3\mathrm{I} & -11x_2 - 17x_3 = -49 \\
\mathrm{III}' = \mathrm{III} - \mathrm{I} & -x_2 - 6x_3 = 98
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 49 \\
\mathrm{II}'' = \mathrm{III}' & -x_2 - 6x_3 = 98 \\
\mathrm{III}'' = (\mathrm{II}' - 11\mathrm{III}')/49 & 49x_3 = -23
\end{array}
$$

$\Rightarrow x_3 = -23$

$\mathrm{II}'' \Rightarrow x_2 = -6x_3 - 98$

$x_2 = 40$

$\mathrm{I} \Rightarrow x_1 = 49 - 4x_2 - 7x_3$

$x_1 = 50$

Lösung: $\underline{\underline{x_1 = 50,\ x_2 = 40,\ x_3 = -23}}$ (eindeutige Lösung)

Aufgabe 4

b)

$$\text{III} \quad 5x_1 + 5x_2 = 10$$
$$\text{I} \quad 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$
$$\text{II} \quad x_1 + 3x_2 = 20$$

$$\text{I} \quad 4x_3 + 3x_1 + x_2 = 0$$
$$\text{II} \quad x_1 + 3x_2 = 20$$
$$\text{III}' = \text{III} - 5\,\text{II} \quad -10x_2 = -90$$

$\text{III}' \Rightarrow \quad x_2 = 9$

$\text{II} \Rightarrow \quad x_1 = 20 - 3x_2$

$x_1 = -7$

$\text{I} \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{4}(3x_1 + x_2)$

$x_3 = 3$

Lösung: $\underline{\underline{x_1 = -7,\ x_2 = 9,\ x_3 = 3}}$ (eindeutige Lösung)