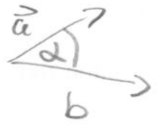
Aufgabe 1

$\vec{a} = (4,1,0)$

$\vec{b} = (0,3,-2)$

$\vec{c} = (1,3,-1)$

a) 

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\alpha$$

$$a^2 = 4^2 + 1^2 + 0$$

$$\Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 0^2 + 3^2 + (-2)^2$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{3 \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 73{,}9^\circ}}$$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) bestimme senkrechten Vektor zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

mit $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

$$= (-2)\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$= (-2, 8, 12)$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 12^2} = \underline{\underline{14{,}56}}$$ Fläche des Parallelogramms

Aufgabe 1

b)

$$\vec{d}_1 = \frac{\vec{e}}{e} = \frac{1}{\sqrt{212}}(-2,8,12)$$

$$\vec{d}_2 = -\frac{\vec{e}}{e} = \frac{1}{\sqrt{212}}(2,-8,-12)$$

c) Volumen ist gegeben durch Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{e} \cdot \vec{c}|$$

$$= |(-2 \cdot 1) + 8 \cdot 3 + 12 \cdot (-1)|$$

$$= 10$$ Volumen

Aufgabe 2

a) $\vec{a}+\vec{b} = (3-2)\vec{e_1} + (2-3)\vec{e_2} + (8-10)\vec{e_3}$

$= \vec{e_1} - \vec{e_2} - 2\vec{e_3}$

$\vec{a}-\vec{b} = -5\vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 18\vec{e_3}$

b) $\vec{a}+\vec{b} = (6, 8, -2)$

$\vec{a}-\vec{b} = (-4, -8, 10)$

c) $\vec{a}+\vec{b} = -12\vec{e_1} + 3\vec{e_3} - 20\vec{e_3}$

$\vec{a}-\vec{b} = e\vec{e_1} + \vec{e_2}$

Aufgabe 3

a) Rechenregeln Vektorprodukt:

I $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

II $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) \overset{2 \times I}{=} \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=0}$$

$$\overset{II}{=} 2 (\vec{a} \times \vec{b}) \checkmark$$

b)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y + a_x b_y c_z - a_y b_x c_z$$

$$= (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_y c_z - b_z c_y, b_z c_x - b_x c_z, b_x c_y - b_y c_x)$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \checkmark$$

$\Rightarrow$ Skalar- und Kreuzprodukt vertauschbar, wenn Reihenfolge der Vektoren konstant ist.

Aufgabe 3

c) es gilt $\vec{e} \circ (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{f}(\vec{e} \cdot \vec{g}) - \vec{g}(\vec{f} \circ \vec{e})$

berechne zuerst 2. Vektor des Skalarprodukts

$$\underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\vec{e}} \times (\underset{\vec{f}}{\vec{c}} \times \underset{\vec{g}}{\vec{a}}) = \vec{c}((\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{a}) - \vec{a}(\vec{c} \circ (\vec{b} \times \vec{c}))$$

$$= \vec{c}(\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})) - \vec{a}((\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{c})$$

$$= \vec{c}(\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})) - \vec{a}(\vec{b} \circ \underbrace{(\vec{c} \times \vec{c})}_{=0})$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \circ ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) = ((\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c})(\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}))$$

$$= (\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}))^2 \quad ✓$$

Aufgabe 4

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$
$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{\alpha}{r}$$

a) Aus der Eigenschaft des Kreuzprodukts folgt, dass $\vec{L}$ zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{v}$ steht. Da der Drehimpuls erhalten ist, bleibt seine Richtung zeitlich konstant, was zur Folge hat, dass die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ für alle Zeiten nur in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}$ liegen können. Da der Geschwindigkeitsvektor die Änderung des Aufenthaltsorts angibt, kann das Teilchen die durch $\vec{r}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Ebene nicht verlassen.

b) $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

für die Beträge gilt:

$L = m r v \sin\beta$, wenn β der von $\vec{r}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ist.

bei t_0 ist $L_1 = L_2$

$\Rightarrow \quad m_1 r_0 v_1 \sin\beta_1 = m_2 r_0 v_2 \sin\beta_2$

$\overset{m_1 = m_2}{\Rightarrow} \quad v_1 \sin\beta_1 = v_2 \sin\beta_2$

$\overset{\beta_1 = \frac{\pi}{2},\, \beta_2 = \frac{\pi}{6}}{\Rightarrow} \quad v_1 = \frac{v_2}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4

b Fortsetzung)

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{\alpha}{r}$$

$$= \frac{m}{2}(2v_1)^2 - \frac{m}{2} v_1^2$$

$$\underline{\underline{\Delta E = \frac{3}{2} m v_1^2}} \qquad \text{oder} \qquad \underline{\Delta E = \frac{3}{8} m v_2^2}$$