Aufgabe 1

Gruppe: (1) Abgeschlossenheit $\forall a,b \in G \; \exists c \in G$ mit $c = a \circ b$

(2) Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(3) Existenz des „Einheitselements" e

$\exists e \in G$ für das gilt $\forall a \in G \quad e \circ a = a$

(4) Existenz des Inversen

$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \circ a = e$

abelsch: (5) kommutativ

$\forall a,b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$

a) prüfe $\mathbb{R}$ ist abelsche Gruppe für Addition

(1) Summe zweier reeller Zahlen ist reelle Zahl

(2) gilt für $\mathbb{R}$

(3) Einh. elements ist 0 denn $0 + a = a \quad a \in \mathbb{R}$

(4) Inverses: $a^{-1} = -a$ denn $-a + a = 0$

(5) gilt für $\mathbb{R}$

↳ $\mathbb{R}$ abelsche Gruppe

b) · zeige, dass es nur ein neutrales Element gibt

- angenommen es gäbe zwei: $e, \hat{e}$

$\Rightarrow \quad e \circ \hat{e} = \hat{e}$ und $\hat{e} \circ e = e$

- für die neutralen Elemente gilt $e \circ a = a \circ e$ (Satz 2 der Vorlesung)

$\Rightarrow \quad e \circ \hat{e} = \underbrace{\hat{e} \circ e}_{= e} = \hat{e}$

$\Rightarrow \quad e = \hat{e}$ d.h. es gibt nur ein neutrales Element

Aufgabe 2

Gruppentafel Aufbau:

	a	b	c ...
a	aoa	aob	aoc
b	boa	bob	boc
c	coa	cob	coc
⋮			

- Prüfe Axiome der Gruppe (Aufgabe 1)

(1) Abgeschlossenheit erfüllt, weil in der Tabelle nur Werte von a, b, c, d, e

(2) prüfe Assoziativgesetz bei $d \circ b \circ b$

$$d \circ (b \circ b) = d \circ d = b$$

$$(d \circ b) \circ b = c \circ b = e$$

$b \neq e \Rightarrow$ Assoziativgesetz gilt nicht

(3) neutrales Element ist a

(4) inverses Element existiert für alle Elemente

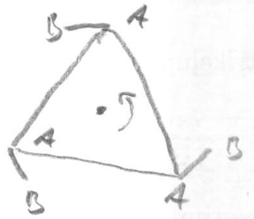
$$\forall x \in M \quad \exists y \in M \text{ mit } \quad y \circ x = a$$

$\Rightarrow$ (1), (3), (4) erfüllt, jedoch (2) nicht

$\Rightarrow$ keine Gruppe

Aufgabe 3

Molekül:



- Keine Spiegelsymmetrie vorhanden
- Drehsymmetrie um die Winkel:

$d_1 \hat{=} 120°$

$d_2 \hat{=} 240°$

$d_3 \hat{=} 360°$ (neutrales Element der Drehgruppe).

$G = \{d_1, d_2, d_3 = e\}$

Gruppentafel:

	d_1	d_2	d_3
d_1	d_2	d_3	d_1
d_2	d_3	d_1	d_2
d_3	d_1	d_2	d_3

($d_x \circ d_y = d_z$
wobei Winkel von z die Summe der Winkel von x und y ist)

Aufgabe 4

Permutationsgruppe hat für $n=3$ 6 Elemente:

$P = \{(1,2,3),$ (neutrales Element)

$(1,3,2),$

$(2,1,3),$

$(2,3,1),$

$(3,1,2),$

$(3,2,1)\}$

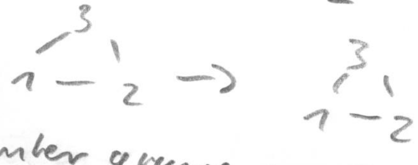
(Schreibweise für Permutation: (a,b,c): $1,2,3 \to a,b,c$)

- Drehgruppe: $d_1, d_2, d_3 \hat{=}$ Drehung um die Winkel $120°, 240°, 360°$

jede Drehung entspricht einer Permutation

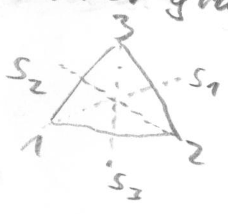
$d_1 \hat{=} (3,1,2)$ denn 

$d_2 \hat{=} (2,3,1)$ " 

$d_3 \hat{=} (1,2,3)$ " 

$D = \{d_1, d_2, d_3\}$ ist Untergruppe von P

- Spiegelgruppe: s_0, s_1, s_2, s_3



s_0 neutrales Element

$s_0 \hat{=} (1,2,3)$

$s_1 \hat{=} (1,3,2)$ denn 

analog $s_2 \hat{=} (3,2,1)$, $s_3 \hat{=} (2,1,3)$

$\Rightarrow S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ ist Untergruppe von P

- P enthält nur Elemente der Gruppe D und S: $P = D \cup S$