Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeiten aus den Voraussetzungen:

$p(l) = \frac{2}{3}$ Kugel fällt nach links

$p(r) = \frac{1}{3}$ Kugel fällt nach rechts

- unabhängige Ereignisse => Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert

a) Kugel fällt 4 mal nach links

$$p(a) = p^4(l) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = \underline{\underline{19{,}8\%}}$$

b) 4 mal nach rechts

$$p(b) = p^4(r) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} = \underline{\underline{1{,}2\%}}$$

c) für Weg zur Mitte muss die Kugel 2 mal links und 2 mal fallen

=> $\binom{4}{2}$ mögliche Wege

- Wahrscheinlichkeit eines Weges $p^2(l)$ $p^2(r)$

$$\Rightarrow \quad p(c) = \binom{4}{2} p^2(l)\, p^2(r) = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} = \underline{\underline{29{,}6\%}}$$

Aufgabe 2

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich wie in Aufgabe 1 über die Binomialverteilung

$$P(E) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- mit p Wahrscheinlichkeit des Einzelereignis
- n - Anzahl der Versuche
- k - Anzahl der Erfolge

Dies ist nicht unbedingt bekannt, jedoch leicht ableitbar aus

(d.h. $\binom{n}{k}$: Anzahl Kombinationen (ohne Anordnung)

$p^k(1-p)^{n-k}$: Wahrscheinlichkeit einer Kombination

a) Stirling-Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{k!\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{für } n, n-k > 10)$$

$$= \frac{1}{k!}\sqrt{\frac{n}{n-k}} \left(\frac{n}{e}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \underline{P(E) \approx \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{e}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} p^k (1-p)^{n-k}}$$

In dieser Aufgabe $p = 0{,}1$, $n = 100$

a) $k = 5$

$\underline{\underline{P(a) = 3{,}39\,\%}}$

b) $k = 10$

$\underline{\underline{P(b) = 13{,}2\,\%}}$

Aufgabe 3

a) Mittelwert der Messreihe

$$\tau_w = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \tau_i$$

$$\underline{\underline{\tau_w = 224{,}9\ s}}$$

b) Standardabweichung

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (\tau_w - \tau_i)^2}$$

$$\underline{\underline{\sigma_\tau = 1{,}81\ s}}$$

c) Fehler der Einzelmessung

$$s_E = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (\tau_w - \tau_i)^2}$$

$$\underline{\underline{s_E = 1{,}91\ s}}$$

Fehler des Mittelwerts

$$s_w = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} \sum_{i=1}^{10} (\tau_w - \tau_i)^2}$$

$$\underline{\underline{s_w = 0{,}60\ s}}$$

Aufgabe 4

gegeben $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

a) gesucht ist das Verhältnis

$$\frac{P(2\sigma)}{P(x)} = \frac{\exp\left(-\frac{(2\sigma)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp(0)} = \exp(-2) = \underline{\underline{13{,}5\,\%}}$$

b) Wendepunkt x_0 => $P''(x_0) = 0$ (notwendiges Kriterium)

$$P'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right)$$

$$P''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right)^2 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\underbrace{\left[\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right]}_{=0 \text{ für } x=\sigma}$$

=> $\underline{\underline{P''(\sigma) = 0}}$ Bedingung erfüllt