Lösungsvorschläge zur 9.Übung

Aufgabe 9.1: (4 Punkte)
Wir wollen die Konzentration beschreiben durch die DGL $y' = -\alpha y$ und der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit einem konstanten Koeffizienten $\alpha > 0$. Die Lösung lautet $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$. Die Halbwertzeit T^* erfüllt die Gleichung

$$\frac{1}{2} y_0 \quad = \quad y_0 e^{-\alpha T^*} \, .$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha \quad = \quad -\ln(0.5)/T^* \; = \; -\ln(0.5)/150 = 0.00462 \, .$$

Nach 9 Stunden (also 540 Minuten) erhält man

$$y(540) \quad = \quad (100\,\mathrm{ppm}) e^{-0.00462 \cdot 540} = 8.25\,\mathrm{ppm} \, .$$

Aufgabe 9.2: (je 3 Punkte)
Der Ansatz $u'(t) = g(u) \cdot f(t)$ gilt hier für $g(u) = u^{-2}$ und $f(t) = t^2$. Trennung der Variablen ergibt:

$$\frac{1}{3} u^3 = \int u^2 du = \int g^{-1}(u) du \quad = \quad \int f(t) dt + c = \frac{1}{3} t^3 + c$$

Wir können also wählen $u(t) = (t^3 + \tilde{c})^{1/3}$. Die Konstante $\tilde{c}$ ergibt sich aus der Anfangsbedingung:

$$1 = u_0 \quad = \quad u(0) = (\tilde{c})^{1/3},$$

also $\tilde{c} = 1$. Die Lösung lautet also insgesamt:

$$u(t) = \sqrt[3]{t^3 + 1} \, .$$

Aufgabe 9.3: (6 Punkte)
Die Lösung w der zugehörigen homogenen DGL mit $w(0) = 1$ lautet

$$w(t) \quad = \quad \exp\left(\int_0^t (x^2 + 1) dx \right) = \exp(\frac{1}{3} t^3 + t)$$

Der Ansatz $y(t) = w(t) \cdot c(t)$ führt für den inhomogenen Anteil $t^2 e^t$ auf

$$c(t) \quad = \quad y_0 + \int_0^t \frac{e^x x^2}{w(x)} dx = y_0 + \int_0^t x^2 e^{-\frac{1}{3} x^3} dx$$

Durch Substitution $z(x) = -\frac{1}{3} x^3$ erhält man nun wegen $y_0 = -1$

$$\begin{aligned} c(t) \quad &= \quad y_0 - \int_0^{z(t)} e^z dz = y_0 - \exp(-\frac{1}{3} t^3) + 1 \\ &= \quad -\exp(-\frac{1}{3} t^3) \, . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$y(t) \quad = \quad -\exp\left(\frac{1}{3} t^3 + t \right) \exp\left(-\frac{1}{3} t^3 \right) \quad = \quad -e^t$$