Lösungsvorschläge zur 8.Übung

Aufgabe 8.1: (1+1+4 Punkte)
(i)+(ii):

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0.4y(t)\,, \qquad y(0) = 10\,000 \\ y(t) &= 10\,000e^{0.4t} \end{aligned}$$

(iii) Es gilt insbesondere $y(10) = 545\,982$ und

$$\begin{aligned} ln(10^6) &= ln(10\,000) + 0.4t \\ \Leftrightarrow \qquad 0.4t &= ln(10^6) - ln(10^4) = ln(10^2) = 4.6 \end{aligned}$$

Also ist nach etwa $t = 11.5$ die Bakterienkultur auf eine Million angewachsen.

Aufgabe 8.2: (2+4 Punkte)
(i)

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0.4y(t) - 0.1y(t)^2\,, \qquad y(0) = 10\,000 \\ \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} &= z(1-z)\,, \qquad z(0) = z_0 \end{aligned}$$

mit $z_0 = 10\,000 \cdot 0.1/0.4 = 2\,500$ und $\tau = 0.4t$.

(ii) Gemäß Script lautet die Lösung in dimensionsloser Form

$$z(\tau) = \frac{z_0}{z_0 + e^{-\tau}(1-z_0)}$$

und die dimensionsbehaftete Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{0.4}{0.1} z(0.4t) = \frac{4z_0}{z_0 + e^{-0.4t}(1-z_0)} \\ &= \frac{10^4}{2\,500 + e^{-0.4t}(1-2\,500)} = \frac{4}{1 - 0.9996\,e^{-0.4t}} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.3: (4 Punkte)
Wir setzen voraus, dass die Bakterienkultur durch eine lineare homogene DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann (wie in Aufg. 8.1). Dann lautet die Lösung

$$y(t) = y_0\,e^{\alpha t}\,.$$

Anwendung des Logarithmuses auf beiden Seiten ergibt:

$$\ln(y(t)) = \ln(y_0) + \alpha t\,.$$

Für $w(t) = \ln(y(t))$ und $\beta = \ln(y_0)$ gilt also der lineare Zusammenhang

$$w(t) = \alpha t + \beta\,.$$

Wir ergänzen jetzt die Tabelle um die Werte $w_i = \ln(y_i)$:

t_i	0	1	2	3	4	5	10
y_i	1000	1023	1041	1059	1083	1110	1218
w_i	6.9078	6.90305	6.94794	6.96508	6.98749	7.01212	7.10497

Die lineare Regression mit den Wertepaaren (t_i, w_i) ergibt:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= 25/7 \\
\bar{w} &= 6.97548 \\
Var(t) &= \overline{t^2} - (\bar{t})^2 \;=\; 9.38776 \\
Cov(t,w) &= \overline{tw} - \bar{t} \cdot \bar{w} \;=\; 25.10775 - 24.91243 = 0.19532 \\
\alpha &= \frac{Cov(t,w)}{Var(t)} \;=\; 0.0208 \\
\beta &= \bar{w} - \alpha\bar{t} \;=\; 6.9012
\end{aligned}$$

Damit erhält man aus statistischer Sicht als Näherung für die Wachstumsrate $\alpha = 0.0208$.