Lösungsvorschläge zur 7.Übung

Aufgabe 7.1: (je 3 Punkte)

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 16.71 \\
Var(x) &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 \;=\; 331 - 16.71^2 \;=\; 51.78 \\
\bar{y} &= 54.57 \\
Var(y) &= \overline{y^2} - \bar{y}^2 \;=\; 3328.57 - 54.57^2 \;=\; 350.69 \\
\overline{xy} &= 1045.57 \\
Cov(x,y) &= \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} \;=\; 133.71 \\
\rho(x,y) &= \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\,Var(y)}} \;=\; 0.9922
\end{aligned}$$

Man kann also von einem linearen Zusammenhang ausgehen.

(b) Die Koeffizienten a, b aus dem linearen Zusammenhang $y = ax + b$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} \;=\; 2.58 \\
b &= \bar{y} - a\bar{x} \;=\; 8.67
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.2: (je 3 Punkte)

Zunächst fügen wir zu Tabelle die Werte $u_i = \ln(y_i)$ hinzu:

t_i	5	7	10	11	11	12
c_i	4.8	3.1	1.4	1.3	1.2	1.0
u_i	1.569	1.131	0.336	0.262	0.182	0

Folgende Hilfsgrößen werden benötigt:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= 9.3333 \\
Var(t) &= \overline{t^2} - \bar{t}^2 = 93.33333 - 9.3333^2 = 6.2222 \\
\bar{u} &= 0.58 \\
\overline{tu} &= 4 \\
Cov(t,u) &= \overline{tu} - \bar{t} \cdot \bar{u} \;=\; -1.41
\end{aligned}$$

Den linearen Zusammenhang $u = at + b$ erhält man mittels:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{Cov(t,u)}{Var(t)} \;=\; -0.227 \\
b &= \bar{u} - a\bar{t} \;=\; 2.7
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich jetzt (näherungsweise):

$$c = \exp(u) = \exp(at+b) = \exp(b)\,\exp(at) = 14.9\,\exp(-0.227\,t)$$

Aufgabe 7.3: (6 Punkte)

Zunächst wollen wir den Wasserpegel über NN am Hamburger Hafen durch eine Funktion beschreiben:

$$w(t) = w_0 \sin(k\pi(t + t_0))$$

Die Amplitude ist laut Aufgabenstellung $w_0 = 2$ Meter. Die Frequenz der Gezeiten ist $k\pi 12 = 2\pi$, also $k = 1/6$. Der Offset t_0 ergibt sich aus der Angabe, dass der Höchststand um 8 Uhr statt findet, also $\sin(k\pi(8 + t_0)) = 1$, bzw. $k\pi(8 + t_0) = \pi/2$ oder auch $8 + t_0 = 3$. Wir haben damit folgende Modelierung:

$$w(t) = 2\,\sin(\pi(t - 5)/6)$$

Die zugehörige Tabelle der $w_i = w(t_i)$ ergibt sich zu:

Uhrzeit	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Fahrzeuge pro Minute	30	160	80	60	40	60	100	80	20
w_i	1	2	1	-1	-2	-1	1	2	1

Wir werden jetzt den Korrelationskoeffizienten zwischen w_i (Wasserhöhe) und y_i Verkehrsdichte ermitteln. Dazu benötigen wir:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= 70 \\
\overline{y^2} &= 5850 \\
\bar{w} &= 0.4 \\
\overline{w^2} &= 1.8 \\
\overline{yw} &= 51 \\
Cov(y, w) &= \overline{yw} - \bar{y} \cdot \bar{w} \;=\; 23 \\
Var(y) &= \overline{y^2} - (\bar{y})^2 \;=\; 950 \\
Var(w) &= \overline{w^2} - (\bar{w})^2 \;=\; 1.64
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Korrelationskoeffizient

$$\rho(y, w) = \frac{Cov(y, w)}{\sqrt{Var(y)\,Var(w)}} = 0.583$$