Lösungsvorschläge zur 6.Übung

Aufgabe 6.1: (4 Punkte)
Wir betrachten die ZV $Z = \overline{Y - X}$, die als normalverteilt angenommen wird mit unbekannter Varianz σ^2 und unbekanntem Erwartungswert μ. Die normiert ZV

$$Z^* \quad = \quad \frac{S_n}{\sqrt{n}}(Z - \bar{z})$$

ist t_n-verteilt ($n = 6$). Das zugehörige 5%-Konfidenzintervall lautet $I^* = [-2.015, 2.015]$. Wir berechnen zunächst den benutzten Mittelwert $\bar{z}$ und die empirische Varianz:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{n}(-2 + 1 - 3 - 4 - 1 - 2) = -1.8333 \\ S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \; = \; 2.9666 \end{aligned}$$

Rückskalierung liefert nun:

$$Z \quad = \quad \bar{z} + \frac{\sqrt{n}}{S_n}Z^* \; = \; -1.8333 + \sqrt{\frac{6}{2.97}}Z^* = -1.8333 + 1.422\,Z^*$$

sowie das transformierte 5%-Konfidenzintervall:

$$I = [-4.7, 1]$$

Der tatsächliche Erwartungswert μ von Z liegt also mit 95%-iger Sicherheit in diesem Intervall.

Ein signifikanter Einfluss der Antibiotikumbehandlung kann durch die Hypothese

$$H_0 : \mu < 0$$

zum Ausdruck gebracht werden. Da tatsächlich negative Werte im Intervall I liegen, kann diese Hypothese also auf dem 5% Signifikanzniveau nicht verworfen werden.

Bemerkung: Genauso können aber auch die Hypothesen

$$\begin{aligned} H_1 &: \quad \mu = 0 \\ H_2 &: \quad \mu > 0 \end{aligned}$$

noch nicht verworfen werden.

Aufgabe 6.2: (4 Punkte)
Da zwei gleiche Ränge auftreten, vergeben wir dazu die Rangzahl 13.5 zweimal. Vergibt man hingegen die Ränge 13 und 14, so wird sich das Endergebnis geringfügig unterscheiden.

Wert	45	48	51	53	63	64	67	69	70	71	75	77	78	78	88	90	110
Gruppe	B	B	A	A	B	A	B	A	A	B	B	A	A	B	A	A	A
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13.5	13.5	15	16	17

Es ergeben sich die Rangzahlen:

$$T_A \;=\; 103.5 \quad \text{und} \quad T_B \;=\; 49.5$$

Unter der Hypothese H_0, dass die Erwartungswerte von T_A und T_B gleich sind, sind der Erwartungswert und die Standardabweichung von T_A:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{n_1}{n}(T_a + T_B) \;=\; \frac{1530}{17} = 90 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n+1)} \;=\; \sqrt{\frac{10 \cdot 7 \cdot 18}{12}} = 10.25 \end{aligned}$$

Aufgrund von $n_1 \geq 10$ können wir T_A $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt annehmen. Die ZV $Z = (T_A - \mu)/\sigma$ ist dann $N(0,1)$ verteilt. Das 10%-Konfidenzintervall von Z lautet:

$$\hat{I} \;=\; [-1.645, 1.645]$$

Die Reskalierung für $T_A = \mu + \sigma Z$ lautet:

$$I \;=\; [73.13875, 106.86125]$$

Mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit liegt der beobachtete Wert also in diesem Intervall I, sofern die Hypothese H_0 gilt. Da $T_A = 103.5 \in I$, wird die Hypothese H_0 also auf diesem Konfidenzniveau akzeptiert.