Lösungsvorschläge zur 6.Übung

Aufgabe 6.1: (4 Punkte)
Als Schätzwert für den Erwartungswert ergibt sich $\overline{x} = 2527$. Die empirische Varianz als Schätzer für die Varianz ergibt sich zu:

$$S_n^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \;=\; 10/9(6398092.8 - 2527^2) \;\approx\; 13\,737.5$$

Das 5%-Konfidenzinterfall der Student t_9-Verteilung ist:

$$[-1.86, 1.86]$$

Das 1%-Konfidenzinterfall der Student t_9-Verteilung ist:

$$[-2.821, 2.821]$$

Die Reskalierung $x_\alpha = t_\alpha S_n/\sqrt{10}$ auf die Anzahl Tomatengewächse ergibt in etwa $x_{0.05} = 37$ und $x_{0.01} = 104.5$:

$$\begin{aligned} P(X \in [2490, 2564]) &= 0.95 \\ P(X \in [2422, 2632]) &= 0.99\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2: (je 3 Punkte)
(i) Zunächst berechnen wir:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 49.26 \\ \overline{x^2} &= 2440.838 \\ \overline{y} &= 52.9 \\ \overline{y^2} &= 2801.82 \\ \overline{y} - \overline{x} &= 3.64 \end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung gezeit betrachten wir die Zufallsvariable $Z = \overline{Y} - \overline{X}$. Als Schätzer für die Varianz von Z benutzen wir:

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-2}(n_1(\overline{x^2} - \overline{x}^2) + n_2(\overline{y^2} - \overline{y}^2)) \\ &= \frac{1}{7}(5(2440.838 - 49.26^2) + 4(2801.82 - 52.9^2)) \;=\; 12\,155 \end{aligned}$$

Die Hilfsvariable T ist t_7-verteilt. Das 5%-Konfidenzintervall ergibt sich damit zu $[-1.895, 1.895]$. Die Reskalierung ergibt

$$z_\alpha \;=\; t_\alpha S_n\sqrt{1/n_1 + 1/n_2} \;\approx\; 4.74$$

Damit lautet das 5%-Konfidenzintervall für Z: $[-4.74, 4.74]$. Der Schätzer für den Erwartungswert für Z ist $\overline{y} - \overline{x} = 3.64$ und liegt somit innerhalb des Intervalls. Die Hypothese, dass beide Populationen gleiches erwartetes Gewicht haben, kann somit zu 95%-iger Sicherheit gestützt werden.

(ii) Wir betrachten die χ_n^2-verteilte ZV

$$\widehat{S}_n^2 \;=\; \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Das 10% Konfidenzintervall hierfür ergibt sich wegen $n = 5$ zu $[1.15, 11.07]$. Die emprische Varianz ist $S_n^2 = \frac{1}{4}(2440.838 - 49.26^2) = 3.5726$. Die Reskalierung ergibt:

$$\begin{aligned} s_\alpha^+ &= \frac{n-1}{1.15} S_n^2 \approx 12.43 \\ s_\alpha^- &= \frac{n-1}{11.07} S_n^2 = 1.29 \end{aligned}$$

Damit lautet das 10% Konfidenzintervall für die Varianz: $[1.29, 12.43]$.

Aufgabe 6.3: (4 Punkte)
Es gilt:

$$\sigma_n^2(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

Ferner hatten wir in der Vorlesung bereits benutzt, dass gilt $E(\overline{X}^2) = \frac{1}{n}Var(X) + E(X^2)$ und $E(\overline{X}^2) = E(X^2)$. Damit ergibt sich mittels des Verschiebungssatzes:

$$E(\sigma_n^2(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{1}{n}Var(X) + E(X^2) - E(X^2) = \left(\frac{1}{n} + 1\right) Var(X)$$

Es gilt daher $E(\sigma_n^2(X_1, \ldots, X_n)) \neq Var(X)$ aber

$$\lim_{n \to \infty} E(\sigma_n^2(X_1, \ldots, X_n)) = Var(X)$$