Lösungsvorschläge zur 4.Übung

Aufgabe 4.1: (4 Punkte)

Da gilt $\sigma = 1/\mu$ folgt:

$$\begin{aligned} P(|X_{exp} - \frac{1}{\mu}| \leq 2\sigma) &= P(X_{exp} \leq \frac{1}{\mu} + 2\sigma) = P(X_{exp} \leq \frac{3}{\mu}) = 1 - \exp(-\mu 3/\mu) \\ &= 1 - \exp(-3) \approx 0.95 \end{aligned}$$

Die $k\sigma$-Prognose ergibt hingegen die Abschätzung:

$$P(|X_{exp} - \frac{1}{\mu}| \leq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

Aufgabe 4.2: (je 3 Punkte)

(a) Wir benutzen die normalisierte ZV

$$\bar{X}_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(\sum X_i - n\mu) = \frac{1}{44}(\sum X_i - 9801),$$

die wir als $N(0,1)$-verteilt annehmen. Da $\frac{9750-9801}{44} \approx -1.159$ folgt

$$\begin{aligned} P(X_1 + \ldots + X_n \geq 9750) &= P(\bar{X}_n^* \geq -1.159) \\ &= 1 - P(\bar{X}_n^* < -1.159) \\ &\approx 1 - 0.123 = 87.7\% \end{aligned}$$

(b) Gefragt ist nach minimalem n, so dass gilt

$$0.99 \leq P(X_1 + \ldots + X_n \geq 80n)$$

Dies ist gleichbedeutend mit $P(\overline{X_n} < 80) \leq 0.01$. Laut Tabelle gilt dies, wenn für die normalisierte ZV gilt $\bar{X}_n^* < -2.33$. Damit folgt

$$-2.33 > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(80 - \mu) = -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

bzw. $n > (2.33\sigma)^2$. Für $n \geq 87$ ist dies bereits erfüllt.

Aufgabe 4.3: (4 Punkte)

Gefragt ist nach x_α^-, x_α^+ und x_β^-, x_β^+, dass

$$\begin{aligned} P(X \in [x_\alpha^-, x_\alpha^+]) &= 0.9 \\ P(X \in [x_\beta^-, x_\beta^+]) &= 0.8 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch die Exponentialverteilung:

$$P(X \in [a,b]) = 1 - e^{-\mu b} - (1 - e^{-\mu a}) = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$$

mit dem Schätzwert für $E(X) = 1/\mu \approx \overline{x}$, also $\mu \approx 1/\overline{x} = 2/9$. Da bei der Exponentialverteilung negative Werte für X keinen Sinn machen, wählen wir zunächst als rechte Intervallgrenzen $x_\alpha^- = x_\beta^- = 0$. Dann ist nun x_α^+ gesucht, so dass

$$\begin{aligned} 0.9 &= e^0 - e^{-\mu x_\alpha^+} \\ \Leftrightarrow \quad 0.1 &= e^{-x_\alpha^+/4.5} \\ \Leftrightarrow \quad \ln(0.1) &= -x_\alpha^+/4.5 \\ \Leftrightarrow \quad x_\alpha^+ &= -4.5 \ln(0.1) \approx 10.362 \end{aligned}$$

Das Intervall $[0, 10.362]$ ist somit ein 10%-Konfidenzintervall. Entsprechend ergibt sich

$$x_\beta^+ \quad = \quad -4.5 \, \ln(0.2) \; \approx \; 7.2425 \, ,$$

also $[0, 7.2425]$ als ein mögliches 20%-Konfidenzintervall. Selbstverständlich lassen sich beliebig viele andere Konfidenzintervalle bilden, denn die Lösungen sind nicht eindeutig.