Lösungsvorschläge zur 3.Übung

Aufgabe 3.1: (2 Punkte)
Für die Poisson-Verteilung gilt $E(X_{Poi}) = m = 400$ und $Var(X_{Poi}) = m$. Damit ergibt sich für die Standardabweichung:

$$\sigma \;=\; \sqrt{Var(X_{Poi})} \;=\; 20\,.$$

Aufgabe 3.2: (2 Punkte)
Wir führen $X_{N(\mu,\sigma^2)}$ zurück auf die Zufallsvariable $Y_{N(0,1)}$.

$$\begin{aligned} P(X_{N(\mu,\sigma^2)} > 11\,g) &= 1 - P(X_{N(\mu,\sigma^2)} \leq 11\,g) \\ &= 1 - P(Y_{N(0,1)} \leq 1/2) \;=\; 1 - 0.6915 \;=\; 0.3085 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt als ca. 30%.

Aufgabe 3.3: (je 2 Punkte)
Wir überführen die normalverteilte ZV X zunächst in die Standard-Normal-verteilte Variable $Y = (X - 70)/6$.

(i) Die Höhe h ist charakterisiert durch $P(X \geq h) = 0.8$. Also

$$0.2 \;=\; P(X \leq h) \;=\; P(Y \leq h')$$

Mit $h' = (h - 70)/6$. Aus der Tabelle ergibt sich $h' \approx -0.845$, also $h = 6h' + 70 = 64.93$. Also wird die Höhe $65\,m$ mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit erreicht.

(ii)
$$\begin{aligned} P(65 \leq X \leq 75) &= 2P(\mu \leq X \leq 75) \;=\; 2(P(X \leq 75) - P(X \leq \mu)) \\ &= 2(P(Y \leq 5/6) - 0.5) \;=\; 0.594\,. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt als rund 60%.

(iii) Gefragt ist nach h gegeben durch

$$0.5 \;=\; P(h \leq X \leq 80) \;=\; P(X \leq 80) - P(X \leq h) \;=\; P(Y \leq 10/6) - P(Y \leq h')$$

mit $h' = (h - 70)/6$. Da gemäß Tabelle $P(Y \leq 10/6) \approx 0.952$, muss gelten $0.452 \;=\; P(Y \leq h')$, also $h' \approx -0.12$ bzw. $h = 6h' + 70 = 69.28$.

(iv) Gefragt ist nach x gegeben durch

$$\begin{aligned} 0.9 &= P(\mu - x \leq X \leq \mu + x) \;=\; 2P(\mu \leq X \leq \mu + x) \;=\; 2(P(X \leq \mu + x) - 0.5) \\ &= 2P(X \leq \mu + x) - 1 \end{aligned}$$

Also

$$0.95 \;=\; P(X \leq \mu + x) \;=\; P(Y \leq x/6)$$

Gemäß Tabelle ergibt sich $x/6 = 1.634$, also $x = 9.84$.

Aufgabe 3.4: (4 Punkte)

Die Exponentialverteilung ist hier ein geeigneter Kandidat. Die Wahrscheilinchkeitsdichte für die ZV X, im Abstand r ein Blatt zu finden, ist demnach:

$$f(r) = e^{-\mu r}$$

Der Parameter μ ermittelt sich aus der angegebenen Information, dass im maximalen Abstand von 500 Matern 75% der Blätter zu finden sind. Für die Verteilungsfunktion $F(r) = 1 - e^{-\mu r}$ muss also gelten $F(500) = 0.75$. Also:

$$\begin{aligned} 0.75 &= 1 - e^{-500\mu} \\ \Rightarrow \quad e^{-500\mu} &= 0.25 \\ \Rightarrow \quad -500\mu &= \ln 0.25 \\ \Rightarrow \quad \mu &= -0.002 \ln 0.25 \approx 0.00277 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist also

$$f(r) = \mu e^{-\mu r}$$

mit $\mu = 0.00277$.