Lösungsvorschläge zur 2.Übung

Aufgabe 2.1: (je 2 Punkte)

Hier ist die Poisson-Verteilung anzuwenden. Da der Erwartungswert 10 ist, gilt $m = E(X) = 10$.

$$\begin{array}{lrcl} (i) & P(X = 10) & = & \frac{10^{10}}{10!} \exp(-10) \approx 5.4\% \\ (ii) & P(X = 0) & = & \exp(-10) \approx 0.0045\% \end{array}$$

Nach (ii) müsste der Pflasterstein um den Faktor $45 : 0.0045 = 10^4$ kleiner sein als die Gehwegplatte. Die Fläche müsste also $10^{-4} m^2$, bzw. $1\,cm^2$ betragen.

Aufgabe 2.2: (je 3 Punkte)

(i) $n = 1000$, $p = 1/200$, $m = np = 5$:

$$P_{Poisson}(X > 8) = \sum_{k=9}^{k=1000} P_{Poisson}(X \geq k) = \exp(-m) \sum_{k=9}^{k=1000} \frac{m^k}{k!}$$

Für die Summe gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=9}^{k=1000} \frac{m^k}{k!} &\approx \sum_{k=9}^{k=\infty} \frac{m^k}{k!} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{m^k}{k!} - \sum_{k=0}^{k=8} \frac{m^k}{k!} \\ &= \exp(m) - \sum_{k=0}^{k=8} \frac{m^k}{k!} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} P_{Poisson}(X > 8) &\approx 1 - \exp(-m) \sum_{k=0}^{k=8} \frac{m^k}{k!} \\ &= 1 - \exp(-5)(1 + 5 + 25/2! + 5^2/3! + \ldots + 5^8/8!) \approx 6,8\% \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P_{Binomial}(X > 8) &= 1 - P_{Binomial}(X \leq 8) = 1 - \sum_{k=0}^{k=8} \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k} \\ &\approx 7,3\% \end{aligned}$$

denn:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0.665%	3.34%	8.38%	14.0%	17.5%	17.5%	14.5%	10.4%	6.45%

Aufgabe 2.3: (4 Punkte)

$$\begin{aligned} Var(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x^2 - \frac{2}{n} \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x + \frac{1}{n} \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= \overline{x^2} - 2(\bar{x})^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$