Lösungsvorschläge zur 10.Übung

Aufgabe 10.1: (4 Punkte)
Die Lösung des zugehörigen homogenen Systems mit $w(0) = 1$ lautet

$$w(t) = e^{-\alpha t}.$$

Die Lösung des inhomogenen Systems ist damit:

$$\begin{aligned} y(t) &= w(t)\int_0^t \frac{b(x)}{w(x)}dx = w(t)b_0\int_0^{\min(t,t^*)} e^{\alpha x}dx \\ &= e^{-\alpha t}\frac{b_0}{\alpha}(e^{\alpha\min(t,t^*)}-1) = \frac{b_0}{\alpha}(e^{\alpha\min(0,t^*-t)}-e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $0 \le t \le t^*$:

$$y(t) = \frac{b_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

und für $t > t^*$:

$$y(t) = \frac{b_0}{\alpha}e^{-\alpha t}(e^{\alpha t^*}-1)$$

Aufgabe 10.2: (4 Punkte)
Zunäst überprüfen wir die Anfangsbedingung:

$$y(0) = K\exp(\ln(y_0/K)\exp(-r\cdot 0)) = K\exp(\ln(y_0/K)) = K\frac{y_0}{K} = y_0\,.$$

Zunäst berechne wir $\ln(y(t)/K$ für das angegebene $y(t)$:

$$\ln\left(\frac{y(t)}{K}\right) = \ln(y_0/K)\exp(-rt)$$

Nun ergibt die Ableitung von y:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)\frac{\partial}{\partial t}(\ln(y_0/K)\exp(-rt)) \\ &= -y(t)\ln(y_0/K)r\exp(-rt) \\ &= -ry(t)\ln\left(\frac{y(t)}{K}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3: (4 Punkte)
Das Differentialgleichungssystem könnte so aussehen:

$$\begin{aligned} A'(t) &= -\lambda A(t) \\ B'(t) &= \lambda A(t) - \mu B(t) \\ C'(t) &= \mu B(t) \end{aligned}$$

Die Lösung war nicht gefragt, kann aber elementar ermittelt werden. Für A lautet die Lösung zum Beispiel:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Setzt man dies ein in die Gleichung für B ergibt sich

$$B'(t) = A_0 \lambda e^{-\lambda t} - \mu B(t)$$

Die Lösung dieser inhomogene Gleichung ist (Trennung der Variablen)

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{-\mu t} \int_0^t A_0 \lambda e^{-\lambda x} e^{\mu x}\, dx \;=\; A_0 \lambda e^{-\mu t} \int_0^t e^{(\mu-\lambda)x}\, dx \\ = \frac{A_0\lambda}{\mu-\lambda} e^{-\mu t}(e^{(\mu-\lambda)t} - 1) &= \frac{A_0\lambda}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

Dies ergibt für C:

$$\begin{aligned} C(t) &= \mu \int_0^t B(x)\, dx \;=\; \frac{A_0\lambda\mu}{\mu-\lambda} \int_0^t (e^{-\lambda x} - e^{-\mu x})\, dx \\ &= \frac{A_0\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\mu}(e^{-\mu t} - 1)\right) \end{aligned}$$