Lösungsvorschläge zur 1.Übung

Aufgabe 1.1: (1+1+2+2 Punkte)
(i) GGbb und ggBB.
(ii) Genotyp GbBb und Phänotyp GB.
(iii) $\Omega = \{GGBB, GGBb, GgBB, GgBb, GGbb, Ggbb, ggBB, ggBb, ggbb\}$
Für (iv) brauchen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten:

Genotyp	GGBB	GGBb	GgBB	GgBb	GGbb	Ggbb	ggBB	ggBb	ggbb
Wahrsch.	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

(iv) $E_1 = \{GgBb\}$, $P(E_1) = 1/4$
$E_2 = \{GGBb, ggBb, GgBB, Ggbb, GgBb\}$, $P(E_2) = 12/16 = 3/4$
$E_3 = \{GGbb, Ggbb\}$, $P(E_3) = 3/16$
$E_4 = \{GGBB, GGBb, GGbb, ggBB, ggBb, ggbb, GgBB, Ggbb\}$, $P(E_4) = 12/16$

Aufgabe 1.2: (1+2+2 Punkte)
(i) Gemäß Vorlesung $E(X) = 1/p = 20$ (Jahre).
(ii)

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= p + (1-p)p + (1-p)^2 p \;=\; p(3 - 3p + p^2) \;\approx\; 14,3\% \end{aligned}$$

(iii) Die Verteilungsfunktion lautet:

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X=k) \;=\; \sum_{j=0}^{k} (1-p)^j p \;=\; p\frac{1-(1-p)^{k+1}}{1-(1-p)} \;=\; 1-(1-p)^{k+1} \\ &= 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: (4 Punkte)
Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl von "Erfolgen". Die Wahrscheinlichkeit, ist gegeben durch die Binomialverteilung:

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Der Erwartungswert $E(X)$ berechnet sich aus

$$E(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$$

Da

$$\binom{n}{k} k \;=\; \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \;=\; \binom{n-1}{k-1} n$$

gilt

$$E(X) \;=\; np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

Benutzt man nun

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{n-1-j} = 1$$

ergibt sich $E(X) = np$, bzw. $p = E(X)/n$.

Aufgabe 1.4: (2 Punkte)

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl von verlorenen Eiern. Die Wahrscheinlichkeit, dass k Eier verloren werden sei gegeben durch die Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}$$

Gefragt ist nach $P(X = 0) = (1-p)^n$. Da p noch nicht bekannt ist, müssen wir ihn aus dem Erwartungswert $E(X)$ berechnen. Nach Aufgabe 1.3 ergibt sich $p = E(X)/n = 0.1$. Somit erhalten wir:

$$P(X = 0) = (1-p)^n \approx 0.5\%$$