Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
PD Dr. Malte Braack
INF 293 (URZ), Zi. 217, Tel.: 06221 / 54-5448
malte.braack@iwr.uni-heidelberg.de

---

11. Übung zur Mathematik für Biologen 2 (SoSe 2006)

Aufgabe 11.1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt: $\exp(tA) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11.2: (6 Punkte)

Wir betrachten das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2 \,, \quad u_1(0) = 1 \,, \\ u_2'(t) &= u_1 \,, \quad u_2(0) = -1 \,. \end{aligned}$$

(a) Man ermittle eine Lösung dieses Systems, indem man es durch den Ansatz $u_1 = -u_2$ zurückführt auf eine skalare Differentialgleichung.

(b) Wie lautet die zugehörige Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$?
Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{k=0^\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh x &= \sum_{k=0^\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{aligned}$$

(c) Man ermittle eine Lösung mittels der Matrixexponentialfunktion aus (b).

Aufgabe 11.3: (4 Punkte)

Wie lautet die Lösung des harmonischen Oszillators

$$x''(t) - 4x(t) = 0$$

zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $x'(0) = -1$.

Abgabe: Mi., den 12. Juli 2006, <u>vor</u> der Vorlesung.