Richtungsfeld

Um noch etwas mehr Anschauung zu den DGls zu gewinnen, schauen wir uns einmal den Begriff vom Richtungsfeld an.

Geben wir uns eine einfache DGl vor, bsp. diese:

$$\frac{dy}{dt} = t + y(t)$$

Ziel wird es sein, $y(t)$ zu bestimmen. Danach könnten wir die Kurve zeichnen und hätten eine gute Anschauung gewonnen.

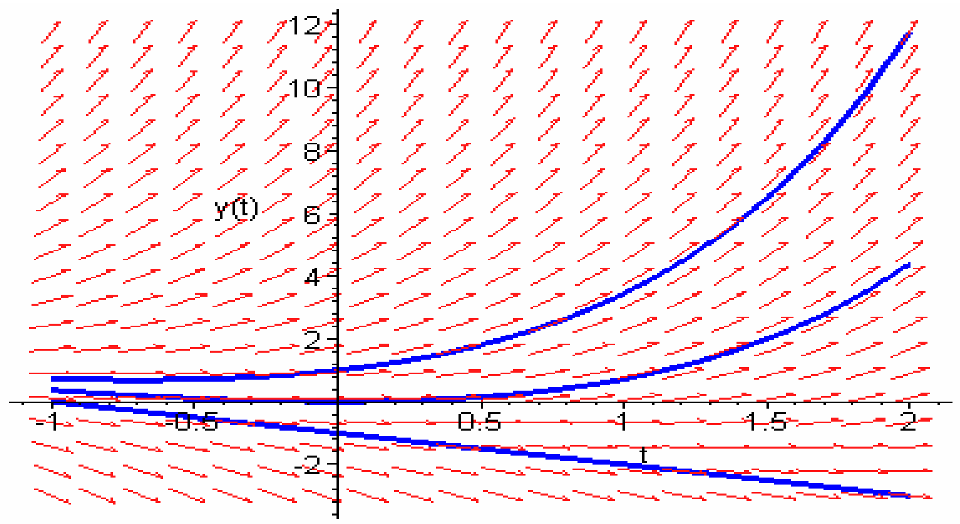
Damit die Lösung eindeutig wird, benötigt man wie wohl bekannt noch einen Anfangswert.

Warum ist das aber so?!

Wenn wir uns einfach mal die Gleichung anschauen, können wir etwas bemerken: Gehen wir in Gedanken in die Zeichnung (die wir noch gar nicht genau kennen!). Vor uns liegt die ty-Ebene und jeder Punkt ist durch $P(t|y(t)$ charakterisiert. Wenn die unbekannte Kurve durch einen Punkt dieser Ebene läuft, dann wird sie obige DGl erfüllen (müssen!).

Also ist bsp. $P(1|4)$ ein solcher Kurvenpunkt, würde die Kurve in diesem Punkt die Steigung $y' = t + y = 5$ besitzen.

Diese Überlegung können wir auf alle Punkte der Ebene anwenden. Tragen wir in jedem Punkt die Steigung mit einem Pfeil ein, so erhalten wir folgendes:



Richtungsfeld zur Differentialgleichung y'(t) = t + y(t). Hervorgehoben sind die Kurven für die Anfangswerte y(0) = -1, y(0) = 0 und y(0) = 1.

Was wir gewonnen haben, sehen wir auch sofort: Hätten wir nun einen Anfangswert (in der Zeichnung wurden die y-Werte -1,0,1 gewählt), so können wir anhand der kleinen Steigungspfeile uns auf der noch unbekannten Kurve fortbewegen. Denn die Kurvensteigung gibt ja die Richung an, in die die Kurve sich entwickelt. Sofort haben wir eine Lösung der DGl!