Aufgabe 2

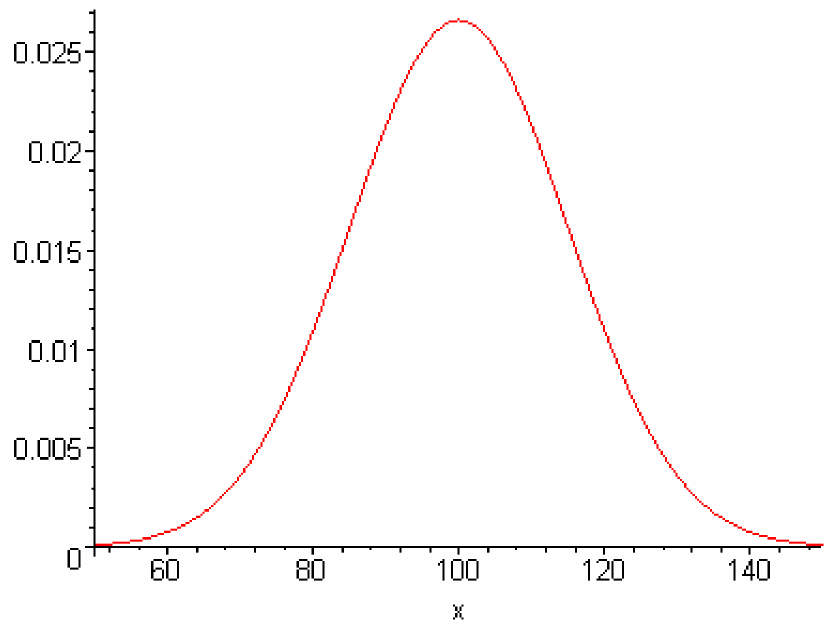
Erst einmal lösen wir diese Aufgabe im Prinzip. Die einzelnen Rechenschritte löst Maple für uns. Daran kann man aber sehen wie so etwas prinzipiell immer geht! Dann kann man sich das nachfolgende Kochrezept sicher leichter merken.

Wir haben unsere Dichtefunktion eindeutig vorgegeben mit echtem $\mu = 100$ und $\sigma = 15$. Es treten hier also keine Schätzer auf, da es sich um die echte Normalverteilung N(100,15) handelt. Die Dichtefunktion von N(μ,σ) ist laut Skript:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left(-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}\right)$$

Daher haben wir hier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x-100}{450}\right)$$



Alles ist jetzt einfach zu berechnen, denn Integrale über die Dichtefunktion liefern Wahrscheinlichkeiten. Manchmal kann man die Dichtefunktion komplett integrieren und erhält die sogenannte Wahrscheinlichkeitsfunktion. Das ist bei obigen Funktionen jedoch schwierig, also lassen wir es. Wir werten die Integrale gezielt nach Aufgabenstellung aus.

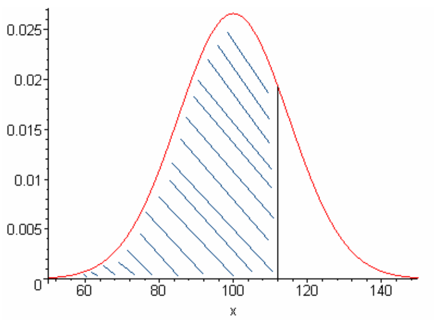
(i) Gesucht wird ein IQ-Wert X, für den gilt $IQ \leq X$. Alle Werte kleinergleich sind erlaubt, es gilt hier also eigentlich $-\infty < IQ \leq X$. Hier erkennt man auch gleich den Modellcharakter, denn negative IQs sind glaube ich nicht bekannt. (Auch an der Dichteverteilung sah man, dass IQs von 0 und 150 etwa gleichwahrscheinlich sind...)

Wir ignorieren das und stellen unser Integral auf:

$$\int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x-100}{450}\right) dx = 0.8$$

Maple löst und liefert $X \approx 113$, wobei man ruhig auf ganze Zahlen runden darf!

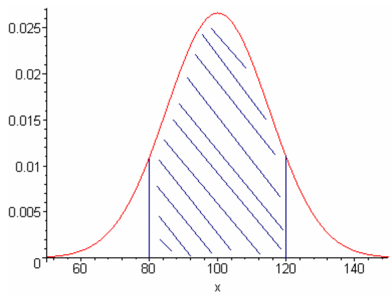
Nochmal zum Veranschaulichen, welche Fläche unter $f(x)$ wir zu 0.8 berechnet haben:



(ii) Weiter geht's. Hier werden uns beide Grenzen vorgegeben und wir sollen die Fläche darunter berechnen. Also machen wir das wieder mit Maple:

$$\int_{80}^{120} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x-100}{450}\right) dx \approx 0.82$$

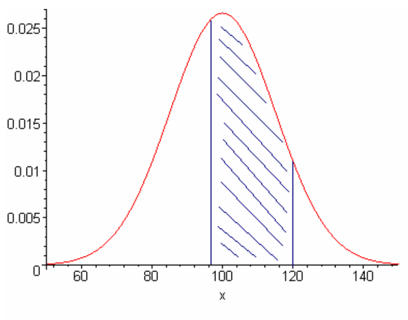
Auch hier nochmal die berechnete Fläche zur Ansicht:



(iii) geht wie (i), nur dass hier die untere Grenze unbekannt ist. Maple löst die Gleichung sofort:

$$\int_{g}^{120} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x-100}{450}\right) dx = 0.5 \Rightarrow g \approx 96.5$$

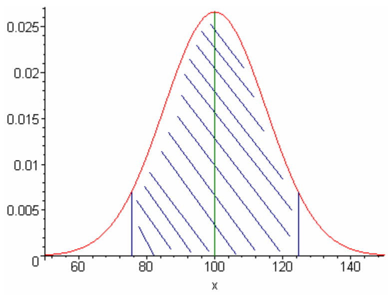
Welche Fläche war das? Siehe hier:



(iv) Zuguterletzt bekommen wir um den Erwartungswert symmetrischen Intervall vorgelegt, der die Fläche 0.9 haben soll. Das Integral ist also folgendes und G geben wir auch gleich an:

$$\int_{100-G}^{100+G} \frac{1}{\sqrt{450\pi}} \cdot exp\left(-\frac{x-100}{450}\right) dx = 0.9 \Rightarrow G \approx 25$$

Also haben wir mit 90%iger Sicherheit IQ-Werte zwischen 75 und 125. Auch hier nochmal die Fläche:



Aufgabe 6

Hier liegt ein Fehler vor! Der inhomogene Teil soll t in 4.Potenz beinhalten! Also:

$$y' = (t^4 + 1)y - t^4 e^t, \;\; y(0) = 1, \;\; 0 \leq t$$

Wie immer überlegen wir uns erst einmal, was für ein Typ es ist (steht zwar da, sollten wir aber üben!):

Die DGL ist inhomogen, klar. Der inhomogene Anteil ist $-t^4 e^t$ und er ist nicht-konstant (ist ja eine Funktion in t...).
Die DGL ist linear, denn die Funktion y wie auch alle ihre Ableitungen (hier nur y') kommen nur in erster Potenz vor.
Die DGL ist von erster Ordnung, denn das haben wir gerade oben festgestellt; die höchste Ableitung war die erste, also erste Ordnung!
Zusammenfassend nennen wir diese DGL eine *inhomogene lineare DGL 1.Ordnung mit nicht-konstantem Koeffizienten.*

Fein. Wie lösen wir so eine Gleichung? Erst einmal lösen wir die zugehörige homogene Gleichung, also:

$$y' = (t^4 + 1)y, \;\; y(0) = 1, \;\; 0 \leq t$$

Dies tun wir mittels Separation, im Folgenden die ersten Standardschritte (mit $y' = dy/dt$):

$$\frac{dy}{dt} = (t^4 + 1)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (t^4 + 1)dt$$

Jetzt haben wir separiert und integrieren beide Seiten.

Zuerst die rechte. Dabei sollten wir uns noch überlegen, welche Grenzen wir ansetzen! Es ist hier von 0 bis t zu integrieren, denn wir wollen ja am Ende eine Gleichung vom Nullzeitpunkt (oben in der Aufgabe steht, dass $0 \leq t$ gelten soll) bis zum Zeitpunkt t haben. Denn dann ist die zugehörige Funktion $y(t)$ genau jene, die wir suchen. Also rechte Seite:

$$\int_0^t (t^4 + 1)dt = (\frac{t^5}{5} + t)|_0^t = \frac{t^5}{5} + t$$

Gut. Einfach und elementar. Nun die linke Seite. Die Grenzen sind schon festgelegt, denn sie richten sich nach denen der rechten Seite. Dort waren es 0 und t. Dann sind es links unten $y(0)$ und oben $y(t)$, denn es sind gerade die zugehörigen y-Werte zu wählen. $y(0) = 1$ wissen wir schon aus der Aufgabenstellung, also nutzen wir das auch aus.

Linke Seite:

$$\int_1^{y(t)} \frac{1}{y} dy = ln|y(t)| - ln|1| = ln(y(t))$$

Das war auch nicht schwer, man musste nur den ln kennen. Nun arbeiten wir wieder mit beiden Seiten, denn wir lösen die eigentliche Gleichung nach $y(t)$ auf und erhalten nach exponieren:

$$y(t) = e^{(t^5/5+t)}$$

Das ist die allgemeine homogene Lösung der obigen DGL. Nun wollen wir aber die inhomogene Lösung. Also verwenden wir jetzt die Formel aus dem Skript und die lautet:

$$Y(t) = w(t) \cdot \left(y(0) + \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt \right)$$

Dabei ist aber noch zu erklären, was $w(t), y(0), b(t)$ bezeichnen. $b(t)$ bezeichnet einfach den inhomogenen Anteil, hier also $b(t) = -t^4 e^t$. $y(0) = 1$ haben wir schon oben abgeklärt und zuguterletzt bleibt noch $w(t)$ zu klären. $w(t)$ ist aber nichts anderes als die allgemeine HOMOGENE Lösung von oben OHNE den Anfangswert. Was das heißt? Die homogene Lösung lässt sich ja schreiben als $y(t) = y(0) \cdot w(t)$ mit $y(0) = 1$ und $w(t) = e^{(t^5/5+t)}$. Dieses ominöse $w(t)$ ist also nichts anderes als der varibale Anteil der HOMOGENEN Lösung, die e-Funktion für sich. Es ist etwas verwirrender Zufall, dass $y(t) = w(t)$, aber wäre dem nicht so, wäre in unserer Separation die Rechnung etwas komplizierter, denn $ln|y(0)| = ln|1| = 0$ ist dann durch etwas anderes ersetzt und das schleppen wir dann mit, exponieren es auch und erhalten eben so ein $y(0)$ in der homogenen Lösung...

EXKURS ANFANG:

Diese Aufteilung zeigt auch, dass die $Y(t)$-Formel Sinn macht, denn schreiben wir diese tolle lange inhomogene Lösungsformel mal wie folgt:

$$Y(t) = w(t) \cdot \left(y(0) + \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt \right) = y(0)w(t) + w(t) \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt$$

Dann sehen wir vorne einfach die allgemeine homogene Lösung und hinten eine spezielle Lösung, die die inhomogene DGL löst. Und es gilt ja IMMER folgender Satz:

DIE ALLGEMEINE INHOMOGENE LÖSUNG IST DIE ALLGEMEINE HOMOGENE KOMBINIERT MIT EINER SPEZIELLEN INHOMOGENEN LÖSUNG!

Wer nicht glaubt, dass der hintere Ausdruck die Ausgangsgleichung löst, der überzeuge sich einfach, indem er einsetzt:

$$Y_{speziell}(t) = w(t) \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt \overset{Produktregel}{\Rightarrow} Y'_{speziell} = w'(t) \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt + w(t) \cdot \frac{b(t)}{w(t)}$$

$$Also: \quad Y'_{speziell} = w'(t) \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt + b(t)$$

Jetzt erkennt man in der Gleichung $Y'_{speziell} = ...$, dass das Integral sehr $Y_{speziell}(t)$ ähnelt, es ist genauer gesagt $\frac{Y_{speziell}(t)}{w(t)}$! Wir erhalten damit für $Y'_{speziell}$:

$$Y'_{speziell} = Y_{speziell} \cdot \frac{w'(t)}{w(t)} + b(t)$$

Erkennen wir jetzt alles wieder? Ja, wenn $w'(t)/w(t) = (t^4 + 1)$ wäre! Nun ist aber mit $w(t) = e^{(t^5/5+t)}$

$$w'(t) = (e^{(t^5/5+t)})' = (t^4 + 1) \cdot e^{(t^5/5+t)} = (t^4 + 1) \cdot w(t)$$

EXKURS ENDE.

Wir haben die Formel oben nun verstanden und setzen einfach ein. Es ergibt sich im ersten Schritt:

$$Y(t) = w(t) \cdot \left(y(0) + \int_0^t \frac{b(t)}{w(t)} dt \right) = e^{(t^5/5+t)} \cdot \left(1 + \int_0^t \frac{-t^4 e^t}{e^{(t^5/5+t)}} dt \right)$$

Wir untersuchen noch das letzte Integral, danach sind wir fertig:

$$\int_0^t \frac{-t^4 e^t}{e^{(t^5/5+t)}} dt = \int_0^t \frac{-t^4 e^t}{e^{t^5/5} \cdot e^t} dt = \int_0^t \frac{-t^4}{e^{t^5/5}} dt = \int_0^t -t^4 \cdot e^{-t^5/5} dt$$

Jetzt noch ein (hier sehr einfache) Substitution, die wir direkt aus der allgemeinen Kettenregel ableiten.

EXKURS ANFANG:

$$(u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Lassen wir auf beide Seiten ein Integral von 0 bis t los (wir könnten auch andere Grenzen wählen), dann steht da:

$$u(v(x))|_0^t = \int_0^t (u'(v(x)) \cdot v'(x)) dx$$

Das Integral hat links die Ableitung gefressen und rechts bisher nix gemacht. Aber wenn wir ein Integral obiger Art haben, also in dem eine Funktion mit innerer Ableitung steht, können wir einfach die linke Seite dafür hinschreiben.

Denkt aber dran, die linke Seite noch auszuwerten, wie man das bei Stammfunktionen eben macht. Bei uns sind die Grenzen 0 und t.

EXKURS ENDE.

Mit diesem Wissen und der Erkenntnis, dass $(-t^4)$ eben die innere Ableitung (also vom Exponenten) von $(e^{-t^5/5})$ ist, finden wir als Stammfunktion für obiges Integral $e^{-t^5/5}$ und damit schließlich unsere Gesamtlösung. Dabei war es hier einfach, u zu bestimmen, weil die Stammfunktion einer e-Funktion wieder eine e-Funktion ist. Die äußere Funktion im Integral ist ja einfach nur $u' = e^{(\dots)}$ gewesen und damit ist auch $u = e^{(\dots)}$! Es folgt schließlich:

$$Y(t) = e^{(t^5/5+t)} \cdot \left(1 + e^{-t^5/5}|_0^t \right) = e^{(t^5/5+t)} \cdot \left(1 + (e^{-t^5/5} - 1) \right)$$

Eigentlich ist auch der obige Ausdruck Lösung, aber ganz vereinfacht haben wir letzten Endes folgende Lösung:

$$Y(t) = e^t$$

Kurze Probe: $Y'(t) = e^t$ steht auf der linken Seite obiger DGL und $(t^4 + 1)e^t - t^4 e^t$ steht rechts , was elementar übereinstimmt. Außerdem ist $Y(0) = e^0 = 1$ ebenfalls korrekt.