Lösung: Aufgabe 1

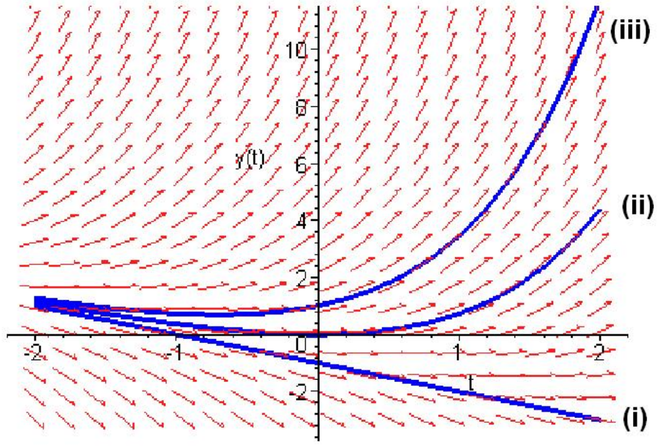
Hier ist y' als $dy(t)/dt$ zu verstehen, was nicht explizit angegeben war.

(a) Hier ist also an einem Koordinatenpunkt $P(t|y)$ die Steigung y' gleich der Summe der beiden Koordinatenwerte t und y.

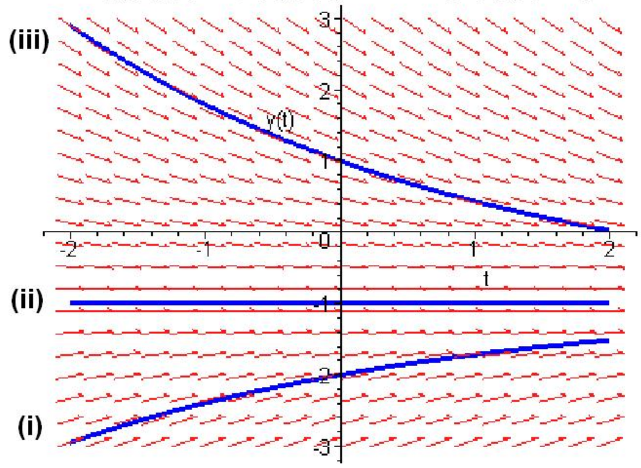
(b) In diesem Fall ist die Steigung unabhängig von der t-Koordinate, jedoch abhängig von der y-Koordinate.

Im folgenden beide Richtungsfelder, erstellt mit Maple 7.

Richtungsfeld für (a) mit drei verschiedenen AWP
[(i) y(0)=-1, (ii) y(0)=0 und (iii) y(0)=1]



Richtungsfeld für (b) mit drei verschiedenen AWP
[(i) y(0)=-2, (ii) y(0)=-1 und (iii) y(0)=1]



Lösung: Aufgabe 2

Wie sich aus dem Text ergibt, liegt folgende DGL vor:

$$\frac{d}{dt}N(t) = (\lambda - \mu)N(t)$$

Führen wir die bilanzierende Größe $k := (\lambda - \mu)$ ein, so können wir alles ablesen, da wir dieses einfache exponentielle Wachstum($k < 0$: Zerfall, $k = 0$: konstante Population) bereits kennen.

Lösung: Aufgabe 3

Das Verfahren der Separation der Variablen ist im Skript erklärt, hier die einzelnen Schritte ohne Kommentar:

$$\begin{aligned} \text{für } 0 < v < 2,\ k > 0 \text{ sei} \qquad & \frac{dv}{dt} = k\frac{v}{2-v} \\ \Leftrightarrow \frac{2-v}{v}dv = kdt \Leftrightarrow & \int (\frac{2}{v} - 1)dv = \int kdt \\ \Leftrightarrow 2\ln|v| - v + c_1 = kt + c_2 \Leftrightarrow & \, 2\ln|v| - v = kt + c. \end{aligned}$$

$$\text{Mit } v(0) = 1 \text{ ergibt sich dann:} \qquad 2\ln|1| - 1 = 0 + c \Rightarrow c = -1.$$

Damit haben wir für den obigen Bereich der Parameter folgende (implizite) Lösung:

$$2\ln|v| - v = kt - 1.$$

Lösung: Aufgabe 4

Hier haben wir es mit einem beschränkten Wachstum zu tun: Besteht zu einem Zeitpunkt τ Konzentrationsausgleich, also $c_i(\tau) = c_a$, so kann es keine weitere Änderung der Konzentration mehr geben.

Damit bleibt für alle Zeiten $c_i(t) \leq c_a$ beschränkt.

Setzt man nun wie im Text angegeben folgende DGL an:

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = k(c_a - c_i(t))$$

mit der Proportionalitätskonstanten $k > 0$, so ergibt sich wieder mittels Separationsansatz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c_i(t) = k(c_a - c_i(t)) \Leftrightarrow \frac{dc_i(t)}{c_a - c_i} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dc_i(t)}{c_a - c_i(t)} = \int kdt \\ \Leftrightarrow -\ln|c_a - c_i(t)| = kt + c \Leftrightarrow \ln|c_a - c_i(t)| = -(kt + c).\end{aligned}$$

Da, wie oben bemerkt, $c_i \leq c_a$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}\ln|c_a - c_i(t)| = -(kt + c) \Leftrightarrow \ln(c_a - c_i(t)) = -(kt + c) \\ \Leftrightarrow c_a - c_i(t) = \exp(-(kt + c)) \Leftrightarrow c_i(t) = c_a - \exp(-(kt + c)).\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $c_i(0) = 0$ ergibt sich $0 = c_a - \exp(0 - c)$ und damit

$$c_i(t) = c_a(1 - \exp(-kt)).$$