Lösung: Aufgabe 1

Die zum LGS gehörende Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die x_i berechnet man mit Cramer wie folgt:

$$x_1 = \frac{det(\begin{pmatrix} 12 & 4 & 6 \\ 16 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & -2 \end{pmatrix})}{detA}, x_2 = \frac{det(\begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 1 & 16 & 7 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix})}{detA}, x_3 = \frac{det(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 1 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix})}{detA}.$$

Dabei ist $detA = 2(3 \cdot (-2)) - 2(7 \cdot 3) - 4(1 \cdot (-2)) + 4(7 \cdot 3) + 6(1 \cdot 3) - 6(3 \cdot 3) = 2$ noch anzugeben.

Damit ergibt sich der Lösungsvektor $x = (x_1, x_2, x_3)^t = (1, -2, 3)^t$.

Lösung: Aufgabe 2

(a) Hier ist $r = 1$ und damit nimmt die Matrix A folgende Form an:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Nun bilden wir nacheinander die Produkte Ax mit den drei gegebenen x-Vektoren:

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}, A_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi - 3\sin\phi \\ 2\sin\phi + 3\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Dabei ist A_1 als Drehmatrix mit Drehwinkel ϕ aufzufassen.

(b) Nun ist in der Matrix A das $r \in [0, \infty)$ wieder beliebig. Um $Ax = b$ zu lösen, kann man Cramer anwenden, was dann wie in Aufgabe (1) funktioniert.
Man bestimmt zuerst $detA = r$. Wird diese zu Null, so kann Cramer nicht angewendet werden; wir haben eine Lösungsschar. Also sei $r \neq 0$. Cramer liefert:

$$x_1 = \frac{det(\begin{pmatrix} r & -r\sin\phi \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix})}{r}, x_2 = \frac{det(\begin{pmatrix} \cos\phi & r \\ \sin\phi & 0 \end{pmatrix})}{r}.$$

Es ergibt sich dann $x = (r\cos\phi, -\sin\phi)^t$.

Lösung: Aufgabe 3

Beachtet man die gegebene Tabelle, so stellt man natürlicherweise folgende Matrix auf:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 50 & 40 & 10 \\ 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Nun soll es eine Kombination der A, B, C geben, welche die angegebene Mischung erlaubt. Also soll gelten:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Auch hier kann man wieder Cramer verwenden. Dazu bestimmen wir wieder $detA = -33000$. Hier kann man erkennen, dass die großen Zahlen umständlich sind. Da wir eine Anwendungsaufgabe habe, welche mit mg arbeitet, können wir aber auch das System wechseln. Arbeiten wir also in cg, also in hundertstel Gramm. Dann wird die obige Gleichung zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Auch gilt nun $detA = -33$ und das ist einfacher zu handhaben. Cramer liefert schließlich

$$a = \frac{150}{33}, b = \frac{50}{33}, c = \frac{40}{33}.$$

Nun müssen wir noch einmal die Einheiten bedenken, da wir sie geändert haben und weil die Angaben in der Tabelle sich auf Gramm beziehen. Man mache sich klar, dass der Lösungsvektor $x = (a, b, c)^t = \frac{1}{33}(150, 50, 40)^t$ in Gramm zu verstehen ist und der obige Einheitenwechsel unwichtig war, da eine Verhältnisgleichung vorliegt.

Lösung: Aufgabe 4

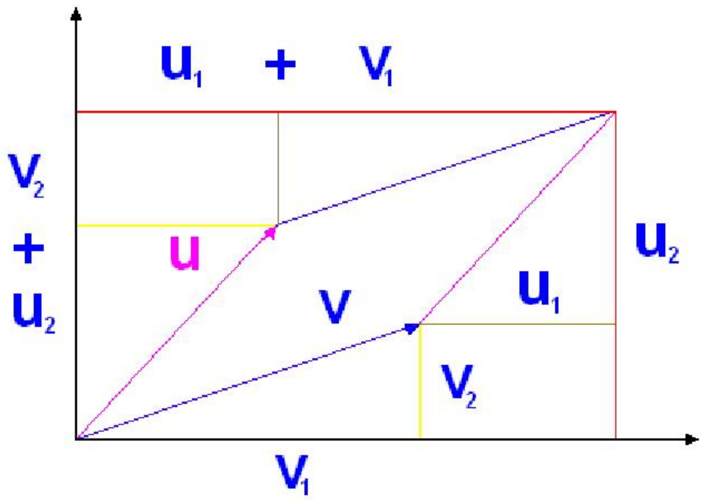
Für diese Aufgabe gibt es eine schöne geometrische Lösung und eine symbolische, die allerdings nicht ohne die Additionstheoreme auskommt. Im Folgenden sollen beide gezeigt werden.

Vorangestellt sei auch noch die Determinante der gegebenen Matrix:
$detA = u_1v_2 - v_1u_2$. Beginnen wir mit der geometrischen und einer Zeichnung.

Dabei sind natürlich Annahmen gemacht worden, welche man genau angeben muss.

Beide Vektoren sind nicht kollinear und nicht die Nullvektoren. Ansonsten würde die Anschauung der Fläche wenig Sinn machen.

Zudem liegen beide im ersten Quadranten der $\mathbb{R}^2$-Ebene. Da dies auch nicht immer der Fall ist, sollte man sich klar machen, was sich dann ändert: Einfacherweise für uns nichts, denn wir arbeiten in dem Beweis mit Flächen, die durch Strecken begrenzt sind. Und die sind immer positiv. Vergleichen wir schließlich mit $|detA|$, so haben wir kein Problem!



Zeichnung 1: Die beiden Vektoren u und v spannen eine Fläche auf.

Wir lesen nun AUS DER ZEICHNUNG ab:
1) Die Gesamtfläche (rot begrenzt) hat den Flächeninhalt $A = (u_2 + v_2)(u_1 + v_1)$.
2) Die kleinen Rechtecksflächen haben jeweils den Flächeninhalt $B = C = u_1 v_2$.
3) Die Dreiecksflächen treten paarweise auf und sind jeweils $D = E = \frac{1}{2} v_1 v_2$ bzw. $F = G = \frac{1}{2} u_1 u_2$.

Bilanzieren wir das. Um das Innere zu erhalten, berechnen wir

$A - B - C - D - E - F - G = u_2 v_1 - u_1 v_2$.

Damit haben wir bereits einen geometrischen Beweis von folgendem Zusammenhang gefunden: die Determinante zweier Vektoren entspricht genau dem Betrag der durch sie aufgespannten Fläche.

Dies kann im Übrigen auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

Nun kommen wir zum „formalen“ Beweis. Er ist eigentlich einfacher, denn der mathematische Formalismus ist das mächtigste Werkzeug der Mathematik. Andererseits muss man diesen dann auch kennen!

Schauen wir uns einmal die Determinante in Polarkoordinaten an. Das klingt schlimm, ist aber einfach. Wir sind ja im $\mathbb{R}^2$, also praktisch in $\mathbb{C}$. Und da hatten wir die Darstellung der Elemente durch $z = a + bi = r(\cos\phi + i \sin\phi)$.

Also kann man einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ auch schreiben als $u = (r\cos\phi, r\sin\phi)^t$. Dabei ist der erste Eintrag ja gerade u_1 und der zweite u_2.

Also drücken wir u durch (r, ϕ) und v durch (R, ψ) aus. Das setzen wir dann in unsere Determinante ein:

$$detA = u_1 v_2 - v_1 u_2 = r\cos\phi R \sin\psi - R\cos\psi r \sin\phi.$$

Hier klammern wir den Faktor rR aus und erkennen ein Additionstheorem:

$$detA = rR(\cos\phi \sin\psi - \cos\psi \sin\phi) = rR\sin\alpha \; mit \; \alpha := \phi - \psi.$$

Dabei ist der Differenzwinkel α der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

Betrachten wir obige Zeichnung genauer, so finden wir schnell, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms gegeben ist durch $F = |u|\,|v| \sin\alpha$. Die Beträge der beiden Vektoren sind aber in Polarkoordinaten sehr einfach; sie sind r und R. Und damit folgt ebenfalls unsere oben aufgestellte Behauptung.