Lösung: Aufgabe 1

Die Matrix M lautet wie folgt:

$$M = \begin{pmatrix} 0.129 & 0.419 & 0.452 & 0 \\ 0.222 & 0.321 & 0.309 & 0.148 \\ 0.096 & 0.438 & 0.315 & 0.151 \\ 0.063 & 0.281 & 0.375 & 0.281 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist die Reihenfolge der Basen A, G, C, U wie angegeben.

Bildet man nun das Produkt $F = M^2$, so ergeben sich die relativen Häufigkeiten sog. 'Zweischrittübergänge'.

Insbesondere ist f_{23} die relative Häufigkeit, daß G über einen beliebigen Zwischenschritt zu C übergeht:

$$f_{23} = 0.222 \cdot 0.452 + 0.321 \cdot 0.309 + 0.309 \cdot 0.315 + 0.148 \cdot 0.375 \approx 0.352.$$

Auf Angabe der kompletten Matrix F wird hier verzichtet.

Lösung: Aufgabe 2

(a) Die Darstellung des Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form lautet:

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man nun sukzessive den n. Vektor durch den (n-1). Vektor nach der obigen Formel und führt dies n-mal durch, so ergibt sich schließlich das n. Folgeglied zu:

$$\begin{pmatrix} r_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ m_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dabei ist die n. Potenz der Matrix als n-fache Multiplikation zu verstehen. Siehe dazu das Skript.

(b) Wir verwenden die Notation von Teil (a):

$$\begin{pmatrix} r_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ m_{n-1} \end{pmatrix},$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a_{ij}:

$a_{11} = (1 - \alpha)$, denn die am nächsten Tag vorhandenen roten Blutkörperchen sind zum Teil die noch vom Vortag vorhandenen und das sind jene, die nicht gefiltert wurden.

$a_{12} m_{n-1}$ gibt die restlichen Blutkörperchen an. Das sind gerade die neu produzierten und damit ist $a_{12} = 1$.

$a_{12} = \alpha\beta$ ergibt sich aus folgender Überlegung: es besteht eine Proportionalität zu den am Vortag ausgesonderten Blutkörperchen; daher das α. Die Proportionalität schreibt sich dann $a_{12} r_n \propto \alpha r_n$. Damit dies eine Gleichung wird, führt man einen Proportionalitätsfaktor ein, der hier β heißt.

$a_{22} = 0$ ist nach Annahme klar, denn die Produktion am Folgetag ist unabhängig von der vorangegangenen.

Um nun das zweite Folgeglied zu berechnen, setzen wir in Formel (1) einfach $n = 2$ und unsere a_{ij} ein. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \alpha\beta & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & 1-\alpha \\ \alpha\beta(1-\alpha) & \alpha\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ m_0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Aufgabe 3

Ich versuche, einen anschaulichen Beweis zu geben.

Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2}$$

Sei also der Vektor x' eine Lösung des inhomogenen LGS (2) und y die des zugehörigen homogenen Falles (wie oben, aber $b_i = 0$). Dabei sind die x_i als Komponenten dieser Vektoren zu verstehen.

Nun addieren wir einfach beide Vektoren komponentenweise, bilden also $x = x' + y$. Setzt man diesen neuen Vektor x so ausgeschrieben in das angegebene System (2) ein, so erhält man:

$$\begin{array}{c} a_{11}(x'_1 + y_1) + a_{12}(x'_2 + y_2) + \cdots + a_{1n}(x'_n + y_n) = b_1 \\ a_{21}(x'_1 + y_1) + a_{22}(x'_2 + y_2) + \cdots + a_{2n}(x'_n + y_n) = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}(x'_1 + y_1) + a_{m2}(x'_2 + y_n) + \cdots + a_{mn}(x'_n + y_n) = b_m \end{array} \tag{3}$$

Wir multiplizieren die einzelnen Summanden nun aus; $a_{11}(x_1 + y_1) = a_{11}x_1 + a_{11}y_1$, ...
Ordnen wir das Ergebnis zeilenweise nach den x_i und den y_i:

$$\begin{array}{c} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \cdots + a_{2n}x'_n + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x'_1 + a_{m2}x'_2 + \cdots + a_{mn}x'_n + a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m \end{array} \tag{4}$$

Interpretieren wir das LGS (4)! Es gilt offensichtlich $b_i = b_i + 0$. Dann stehen in jeder Zeile zwei (uns wohlbekannte) Gleichungen; einmal eine Zeile von System (2) und die dazugehörige homogene Zeile mit y als Lösung.

Da beide nach Voraussetzung erfüllt sind, ist unser LGS (4) erfüllt. Es ging durch äquivalente Umformungen aus (3) hervor, also ist auch dieses erfüllt.

Damit ist $x = x' + y$ eine Lösung von (2) und die Behauptung ist bewiesen.

In den Beweis geht im Übrigen die Linearität der GS ganz entscheidend ein: von (3) nach (4) kommen wir so nicht, wenn das GS (2) nicht linear wäre.

Lösung: Aufgabe 4

Solange wir uns mit LGS befassen, sind wir im mathematischen Teilgebiet 'Lineare Algebra'. Der Inhalt von Aufgabe 4 hat elementare Bedeutung für diese Disziplin; er führt direkt auf den Begriff der Determinante.

Der Beweis selbst sei hier knapp angegeben:

Gegeben ist das homogene LGS

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$ad - bc \neq 0. \tag{6}$$

Dann ist mindestens ein Koeffizient ungleich 0, denn sonst ist (6) nicht erfüllt.

Sei o.B.d.A. $a \neq 0$.

Wir führen eine Äquivalenzumformung durch: wir subtrahieren das c/a-fache der ersten Gleichung von der zweiten, lassen die erste unverändert und erhalten:

$$\begin{array}{rl} ax + & by = 0 \\ 0 + & (d - bc/a)y = 0 \end{array} \tag{7}$$

Dabei ist die zweite Gleichung von (7) entscheidend für die Lösungen von (5): ist $d - bc/a = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$, so ist y frei wählbar und wir haben eine Lösungsschar.

Gilt andererseits $ad - bc \neq 0$, so muss $y = 0$ gelten, soll die zweite Gleichung von (7) erfüllt sein.

Dann ist aber die erste Gleichung von (7) einfach $ax = 0$. Da $a \neq 0$ n.V., folgt $x = 0$ und damit die Behauptung.