Blatt 3 - Musterlösung

Aufgabe 1:

Aufgabe

Bestimme die Polardarstellung folgender Zahlen. Stelle sie in der komplexen Ebene dar.

(a) $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(b) $z_4 = z_1 z_2 z_3$

Mathematischer Hintergrund: Polardarstellung komplexer Zahlen

Mit der Darstellung der letzten Übungsblätter ist diese Aufgabe natürlich auch lösbar. Nur langwierig. Benutzt man die **Polardarstellung**, so vereinfach sich vor allem **(b)** erheblich, denn eine **komplexe Multiplikation ist eine Drehstreckung**; es wird **um den Polarwinkel gedreht** und **um den Betrag gestreckt (oder gestaucht)**. Dies wissen wir schon für **z = i**, denn das war ja eine **Drehung um 90° ohne Streckung** (also **Streckfaktor = 1**). Der Polarwinkel von **i** ist **90°**, der Betrag **1** und das ist die Begründung. Der Polarwinkel wird oft auch **das Argument** genannt.

Wir definieren uns für $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ den Polarwinkel als $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctan(b/a)}$. Dabei beschränken wir uns auf den Intervall $(-\pi, \pi)$. Das ist schon alles und kennen wir uns mit den trigonometrischen Funktionen aus, so haben wir keine Probleme. Die übliche Darstellung der komplexen Zahl $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ ist dann $\mathbf{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$ (Nachdenken!).

Man findet im Komplexen den Zusammenhang $\mathbf{exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$, welchen wir hier nicht beweisen. Damit haben wir eine schöne Darstellung für komplexes **z** gefunden: $\mathbf{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$.

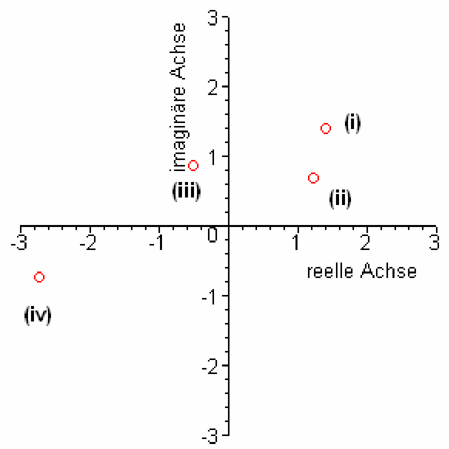
Lösung

(i) $|z_1| = 2$, $\varphi = \arctan(1) = \pi/4$ (= 45°). Also $\mathbf{z_1 = 2 \cdot e^{i\pi/4}}$.

(ii) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ (= 30°). Also $\mathbf{z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/6}}$.

(iii) $|z_3| = 1$, $\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = 2\pi/3$ (= 120°). Also $\mathbf{z_3 = e^{i2\pi/3}}$.

(iv) $|z_4| = |z1| \cdot |z2| \cdot |z3| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4 + \pi/6 + 2\pi/3 = (3+2+8)\pi/12 = 13\pi/12 = \pi + \pi/12$, was genau den 195° entspricht. Damit ist $\mathbf{z_4 = 2\sqrt{2} \cdot e^{i13\pi/12}}$.



Aufgabe 2:

Aufgabe
Löse folgendes komplexe Gleichungssystem:

(1) $A + B = 0$ *und* *(2)* $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot B = 1$.

Lösung
Wir lösen dieses **Gleichungssystem** wie auf Blatt 1, außer, daß diesmal **komplexe Lösungen** möglich sind. Addieren wir in **(2)** auf beiden Seiten das $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ fache von **B**, so fällt, da **(1)** gilt, **A** heraus und **B** ergibt sich zu **B =** $-\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$. Damit ist auch **A** nach **(1)** eindeutig: **A =** $-\frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Aufgabe 3:

Aufgabe
Löse die Gleichung $z^3 = -2 + 2i$ und stelle die Lösungen in der komplexen Ebene dar.

Lösung
Hier findet man eine **ganz wichtige Eigenschaft der komplexen Zahlen**: Es existieren in diesem Zahlbereich **beliebige n-te Wurzeln** und genau das war ja der Sinn dieser „künstlichen" Körpererweiterung.

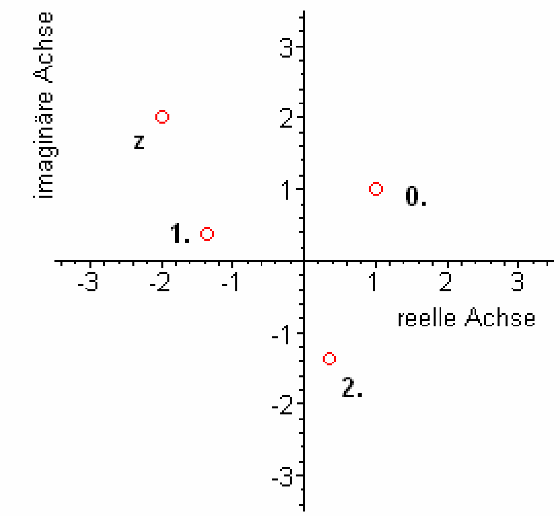
Mit der Formel $(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}$ für $\mathbf{0 \leq k < n}$ findet man alle **n Einheitswurzeln**. Dabei ist die Rechnung besonders einfach, wenn die gegebene Zahl **z** in **Polardarstellung** gegeben ist. Also formen wir **z = -2 + 2i** um in **z =** $\sqrt{8} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{i3\pi/4}}$. Dann ergeben sich die **drei Lösungen** direkt als:

0. dritte Wurzel: $(\sqrt[3]{z})_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot e^{i(3\pi/4)/3} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

1. dritte Wurzel: $(\sqrt[3]{z})_1 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot e^{i((3\pi/4)+2\pi)/3} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi 11/12}$

2. dritte Wurzel: $(\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot e^{i((3\pi/4)+4\pi)/3} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi 19/12}$

Zwei der drei Lösungen sehen etwas häßlich aus, aber zeichnet man die Zahlen:



Jetzt erkennt man: Alle Lösungen **liegen auf einem Kreis** und teilen diesen in einem **gleichseitigen (weil gleichwinkligen!) Dreieck**.

Aufgabe 4:

Aufgabe
Sei λ komplex und Lösung eines Polynoms mit reellen Koeffizienten a_j, $j = 0, ..., m$, d.h. λ erfüllt

$\pi_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m = 0$.

Zeige, daß dann auch λ^* Nullstelle ist.

Hinweis: Verwende für komplexe z, w: $(zw)^* = z^*w^*$.

Beweis
Diese Aufgabe ist rein mathematisch. Sie zu beweisen, sollte einem Mathematiker leicht fallen, für einen Biologen ist sie jedoch nicht so wichtig. Nichtsdestotrotz sei hier die Lösung angegeben. **Dabei verwenden wir** die Voraussetzung, **daß die a_j reell sind**, **den angegebenen Hinweis** und folgende **Beziehung**: $(z+w)^* = z^* + w^*$.

Sei also λ eine Nullstelle von π. Dann gilt bekanntlich:

$a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m = 0$.

Konjugiert man beide Seiten , so erhält man folgende (natürlich auch richtige!) Gleichung:

$(a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m)^* = 0^*$.

Dies ist aber mit dem Hinweis, der obigen Beziehung und der Voraussetzung, daß die a_j reell sind, äquivalent zu:

$a_0 + a_1\lambda^* + ... + a_m(\lambda^*)^m = 0$. **q.e.d.**

[Ganz kurz notiert gilt ja $(\pi(\lambda))^* = \pi(\lambda^*)$ womit die Behauptung klar ist.]