Blatt 2 - Musterlösung

Aufgabe 1:

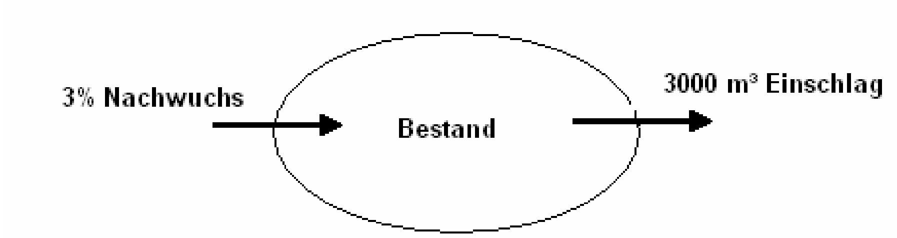
Aufgabe
In einem Wald schlägt man in jedem Winter 3000m³ Nutzholz; der verbleibende Bestand an schlagbarem Nutzholz wächst das Jahr über um 3%.

(a) Stelle die zugehörige Rekursionsgleichung auf und bestimme für a_0 = 50000m³ die Lösung.
(b) Untersuche das Langzeitverhalten der Lösung. Was bedeutet es für den Nutzholzbestand?
(c) Was passiert mit dem Bestand für verschiedene Anfangswerte a_0?

Lösung
Bemerkung: Wir lassen im folgenden Einheiten fort und werden diese erst am Ende schreiben.
Aufgabenteil (a) – (c)
Es werden also vom aktuellen Bestand erst 3000m³ geschlagen und dann erholt er sich der Rest um 3%. Der neue Bestand ist dann gegeben durch

(1) $\mathbf{a_{n+1} = (a_n - 3000) \cdot 1.03}$.

Um die Aufgabe ganz zu verstehen, zeichnen wir ein **Diagramm**:



Nun können wir eine erste, **konstante Lösung** eigentlich raten: gilt **Nachwuchs = Einschlag**, bleibt der Bestand Jahr um Jahr erhalten. Für dieses $\mathbf{a_{0*}}$ liefert unsere Rekursion immer wieder den Wert $\mathbf{a_{0*}}$, also muß gelten $\mathbf{a_{n*} = (a_{n*} - 3000) \cdot 1.03}$, woraus sich ergibt: $\mathbf{a_{0*} = 103000}$. Damit kann als erster Aufgabenteil **(c)** schon beantwortet werden: gibt es genau $\mathbf{a_0}$ **= 103000m³** Nutzholz, so bleibt die Population konstant, bei mehr Anfangsbestand ($\mathbf{a_0}$ **> 103000m³**) kann sie immer weiter wachsen und bei weniger ($\mathbf{a_0}$ **< 103000m³**) muß sie zwangsläufig verschwinden. Das ergibt sich auch aus den mathematischen Gleichungen:

(1) ist ja äquivalent zu $\mathbf{a_{n+1} = 1.03 \cdot a_n - 3090}$. Würde die **- 3090** nicht dabei stehen, könnten wir diese Gleichung einfach lösen! Wir verwenden jetzt einen Trick. Für die Rekursion kennen wir ja schon eine Lösung: a_{0*}. Schreiben wir beide untereinander:

(1) $\mathbf{a_{n+1} = 1.03 \cdot a_n - 3090}$ und ziehen beide voneinander ab. Dann erhalten
(2) $\mathbf{a_{0*} = 1.03 \cdot a_{0*} - 3090}$ wir eine dritte Gleichung, welche sicher auch gilt:

---

(3) $\mathbf{(a_{n+1} - a_{0*}) = 1.03 \cdot (a_n - a_{0*}) - 0}$

Was haben wir erreicht? Wir kennen weder $\mathbf{a_{n+1}}$ und damit leider auch nicht $\mathbf{(a_{n+1} - a_{0*})}$. Aber die dritte Gleichung hat einen Vorteil gegenüber den anderen beiden; die **- 3090** ist verschwunden. Nennen wir also die Klammern $\mathbf{(a_{n+1} - a_{0*})}$ und $\mathbf{(a_n - a_{0*})}$ einfach $\mathbf{z_{n+1}}$ und $\mathbf{z_n}$. Dann haben wir eine einfach Lösung, die wir schon auf dem ersten Blatt erwähnt hatten (siehe **Aufgaben 2, 4**):

(4) $\mathbf{z_n = z_0 \cdot (1.03)^n}$,

was man leicht nachprüft. Wir haben also **Gleichung (3)** gelöst. Erinnern wir uns jetzt, was $\mathbf{z_0}$ und $\mathbf{z_n}$ bedeuten: $\mathbf{z_0 = (a_0 - a_{0*})}$. Da $\mathbf{a_0 = 50000}$ laut Aufgabenstellung und $\mathbf{a_{0*} = 103000}$, was wir oben zeigten ist also $\mathbf{z_0 = - 53000}$ (daß sie seltsam (negativ) aussieht, ist uns einfach egal!). Auch $\mathbf{z_n}$ bestimmen wir zu $\mathbf{z_n = (a_n - a_{0*}) = a_n - 103000}$. Wir setzten diese beiden Ergebnisse in **(1)** ein und erhalten: $\mathbf{a_n - 103000 = - 53000 \cdot (1.03)^n}$ was wir noch umschreiben zu:

(5) $\mathbf{a_n = 103000 - 53000 \cdot (1.03)^n}$.

Mit dieser **Gleichung (5)** haben wir **Aufgabenteil (a)** gelöst!

Aufgabenteil (b) ist sofort klar; **(5) geht für n → ∞ ebenfalls gegen unendlich**. Interpretieren wir dies für den Bestand, so kann dieser ja nicht negativ sein. Aber es heißt, daß die Bäume verschwinden. Maple liefert für den Zeitpunkt des Aussterbens n = 22.47..., also ist nach 22 Jahren Schluß mit Roden.

Aufgabenteil (c) haben wir oben bereits gelöst, aber schaut man auf $\mathbf{z_0 = (a_0 - 103000)}$ und erinnert sich **(4)**, so ist alles klar.

Aufgabe 2:

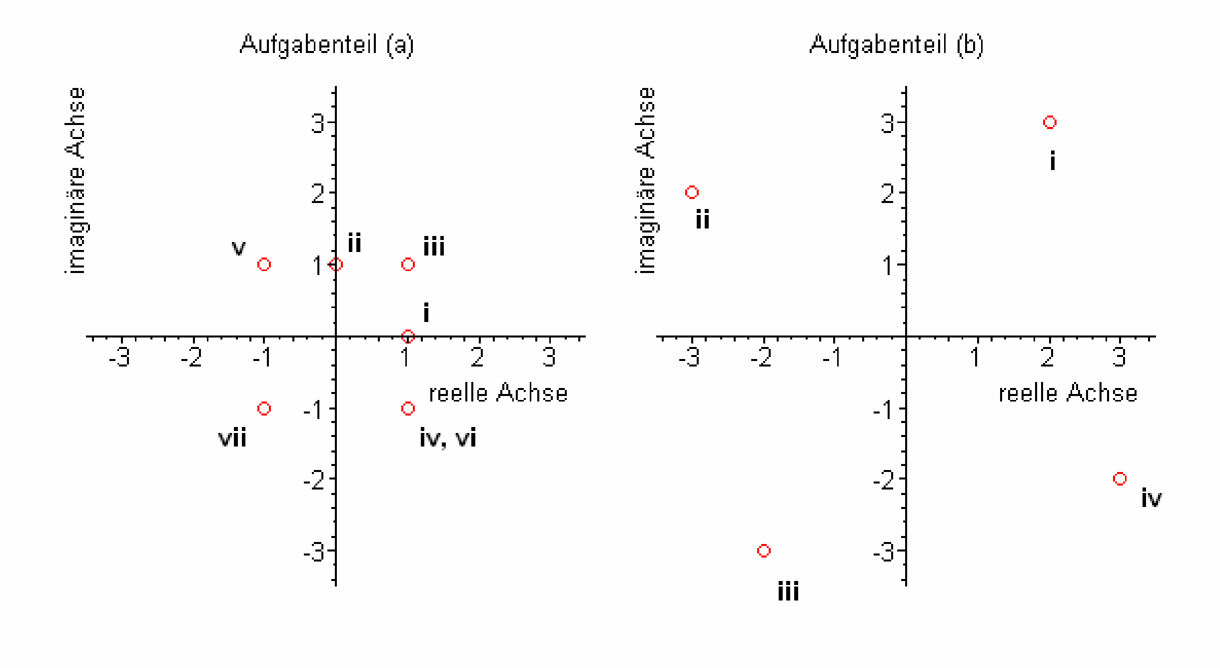
Aufgabe

Stellen sie folgende komplexe Zahlen in der komplexen Ebene dar (bedeutet komplexe Konjugation):*

(a) ***1, i, 1+i, (1+i)*, -1+i, 1-i, -1-i*** *und (b)* ***2+3i, (2+3i)·i, (2+3i)·i², (2+3i)·i³***

Lösung

Hier gibt es wenig zu sagen. Zuerst zeichnet man die **komplexe Ebene**, dann trägt man die Punkte ein nach dem Schema **P(Re(z)|Im(z))** für jedes **z = Re(z) + i · Im(z)**. Dabei bedeutet **Re(z) Realteil** und **Im(z) Imaginärteil**. **Konjugation** heißt, daß der Imaginärteil einfach das andere Vorzeichen bekommt, also **für z wie oben ist z* = Re(z) - i · Im(z)**. Damit fallen in **(a)** der dritte und der fünfte Punkt aufeinander. In **(b)** spart man Arbeit, wenn man sich klar macht, daß Multiplizieren mit **i** eine **Drehung um 90°** im Gegenuhrzeigersinn (= dem **mathematisch positiven Sinn**) bewirkt. Also zeichnen wir die Punkte ein (mit i, ii, ... durchnumeriert):



Aufgabe 3:

Aufgabe
Berechne Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender Zahlen:

$$\frac{1}{i}, \frac{1}{1-i}, \frac{1+i}{1-i}, \frac{a+bi}{a-bi}$$ *mit a,b ungleich null und reell.*

Lösung
Um hier Erfolg zu haben, sollte man zum einen die **komplexe Multiplikation** kennen. In dieser wird **i wie eine Zahl behandelt** und **i² wird immer durch -1 ersetzt**.

Zum anderen muß man **Nenner reell machen** können. Dies erreicht man mit **Erweitern um das konjugiert Komplexe der Zahl im Nenner**. Im Nenner steht dann ja einfach der Betrag dieser Zahl und im Zähler hat man ein Produkt zu berechnen. Wie das geht, steht oben. Damit werden die Aufgaben trivial.

Der **Betrag** wird ja errechnet durch $|z| = [Re(z)^2+Im(z)^2]^{1/2}$.

i) $\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i$. Also: $\mathbf{Re(z_1) = 0, Im(z_1) = -1}$ und $\mathbf{|z_1| = [0^2+1^2]^{1/2} = 1}$.

ii) $\mathbf{Re(z_2) = \frac{1}{2} = Im(z_2)}$ und $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) $\mathbf{Re(z_3) = 0}$ und $\mathbf{Im(z_3) = 1 = |z_3|}$.

iv) $$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+2abi+(ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Dies ergibt $\mathbf{Re(z_4)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\mathbf{Im(z_4)} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ und $\mathbf{|z_4| = 1}$.

Aufgabe 4:

Aufgabe
Berechne das konjugiert Komplexe von

(a) $(3+9i) - (15+i)$
(b) $(3+9i)(15+i)$
(c) $[(2-i)/(2-3i)]^{-1}$

Lösung
Mit dem in Aufgabe 3 Gesagtem ist auch diese Aufgabe schnell beantwortet. Wir vereinfachen, sortieren und drehen den Imaginärteil um:

(a) $(3+9i) - (15+i) = -12 + 8i$. Also ist $z_1^* = -12 - 8i$.
(b) $(3+9i)(15+i) = 36 + 138i$. Also ist $z_2^* = 36 - 138i$.
(c) $[(2-i)/(2-3i)]^{-1} = (2-3i)/(2-i) = (7-4i)/5$. Also ist $z_3^* = 7/5 + 4i/5$.

In (c) vereinfacht man wie in Aufgabe 3, daher keine Zwischenschritte.