Lösung: Aufgabe 1

Wie oft in praktischen Aufgaben gemacht, setzt man auch hier die Konstante 1879 auf 0. Dies muß man natürlich nicht tun, vereinfacht aber die Zahlen erheblich.

Zum Zweiten findet man noch aus den Angaben, daß ein Pfund Fang einem Fisch entspricht und 1899 nur 10% der Population gefangen wurden.

Dann ergeben sich folgende Beziehungen:

$$N(0) = N_0 = 435, \; N(20) = 12340000.$$

Mit dem angegebenen Ansatz und mit Separation der Variablen ergibt sich schließlich:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \Leftrightarrow \frac{1}{N}dN = \lambda dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{N}dN = \int \lambda dt \Leftrightarrow \ln N = \lambda t + c$$
$$\Leftrightarrow N = \exp(\lambda t + c) = C \exp(\lambda t)$$

Mit $C = N_0 = 435$ und der Bedingung $12340000 = 435 \exp(\lambda 20)$ ergibt sich schließlich

$$N(t) = 435 \exp(0.51t).$$

Lösung: Aufgabe 2

(a) Eigenvektoren erfüllen für ihren jeweiligen Eigenwert die folgende Gleichung:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}v_1 & a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 & a_{22}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Nun kann man das LGS einfach lösen, denn es gilt ja $a_{12} \neq 0$ und somit können wir aus der ersten Gleichung $v_2 = (\lambda v_1 - a_{11}v_1)/a_{12} = (\lambda - a_{11})/a_{12}$ berechnen.

Da man die Eigenvektoren nur auf einen konstanten Faktor genau (warum?!) bestimmen kann, setzt man üblicherweise den Betrag der Eigenvektoren auf 1 fest, oder man wählt für den ersten Eintrag 1. Wir wollen uns an letztere Konvention halten und es folgt die Behauptung.

Nun soll gelten: $a_{12} = a_{21} = 0$. Dazu ist erst einmal zu bemerken, daß dann unsere Rechnung oben „falsch“ wird, denn dort haben wir $a_{12} \neq 0$ vorausgesetzt. Wir können nun entweder die obere Formel umschreiben, denn eigentlich war es ja egal, welcher Eintrag nicht 0 war, Hauptsache, einer. Oder wir rechnen per Hand.

Um zu üben, tun wir letzteres, wobei wir noch vereinbaren $a_{11} =: a$ und $a_{22} =: b$:

Um die Eigenvektoren bestimmen zu können, brauchen wir erst einmal die Eigenwerte. Wir denken hier mal nicht, sondern rechnen einfach mit unserem Ansatz $det(A - \lambda I) = 0$.

Dies führt auf folgende Gleichung:

$$(a-\lambda)(b-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a,\ \lambda_2 = b.$$

Dieses Ergebnis kann man sich merken!

Mit diesen Eigenwerten gewappnet, bestimmen wir nun aus $Av = \lambda v$ unsere Eigenvektoren.

Für den ersten Eigenwert $\lambda_1 = a$ ergeben sich dann die beiden Gleichungen

$$av_1 = av_1,\ bv_2 = av_2.$$

Hier haben wir eine kleine Fallunterscheidung zu machen.

Ist $a \neq b$, so muss zwangsläufig $v_2 = 0$ gelten. Dann haben wir die Lösung $v = (1,0)^t$. Für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = b$ ergibt sich in diesem Fall analog $v' = (0,1)^t$.

Ist jedoch $a = b$, d.h. es gibt nur einen Eigenwert, dann stellen wir fest, daß unser LGS für alle Vektoren erfüllt ist.

(b) Hier verwenden wir nur die Eigenschaften der Komplexen Konjugation und daß A reell ist.

Es gilt ja $Av = \lambda v \Leftrightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Leftrightarrow \overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v} \Leftrightarrow A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.

Die letzte Gleichung ist aber genau dann erfüllt, wenn $\overline{\lambda}$ Eigenwert zu A ist, was aber auch Teil der Voraussetzung ist. Dann haben also die Eigenvektoren auch komplex-konjugierte Form zueinander.

Lösung: Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist ein gutes Beispiel für den Nutzen der Eigenwert- und Eigenvektorrechnung.

Zuerst einmal finden wir aus dem Text folgende Bedingungen (mit $k_1 \neq k_2$):

Pansen [r(t)]: $\frac{dr(t)}{dt} = r'(t) = -k_1 r(t)$, $r(0) = r_0$ und

Abomasum [u(t)]: $\frac{du(t)}{dt} = u'(t) = k_1 r(t) - k_2 u(t)$, $u(0) = 0$.

Wir führen noch eine Hilfsfunktion $z(t) = (r(t), u(t))^t$ ein, welche einfach beide Gleichungen in einem System zusammenfasst. Für $z'(t)$ finden wir dann noch folgendes:

$$z'(t) = Az(t) \text{ mit } A := \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Jetzt kommt ein DGL-Standardansatz der Naturwissenschaften; die Exponentialfunktion:

$$z(t) := v \exp(\lambda t) \Rightarrow z'(t) = \lambda \cdot v \exp(\lambda t).$$

Damit wird Gleichung (1) zu:

$$\lambda \cdot v \exp(\lambda t) = A \cdot v \exp(\lambda t). \tag{2}$$

Und wir haben „nurnoch“ ein Eigenwert/vektor-Problem zu lösen, denn Gleichung (2) hat die uns bekannte Form $\lambda v = Av$!

Wir werden also erst die Eigenwerte bestimmen und dazu dann die Eigenvektoren. Dann sind aber genau diese λ und r die Bestimmenden für $z(t)$ und damit für unser Abomasum und den Pansen. Dies sollte klar sein!

Nun die etwas langwierige, aber rein technische Rechnung:

Die Eigenwerte ergeben sich hier leicht zu $\lambda_1 = -k_1$ und $\lambda_2 = -k_2$. Damit gehen wir in $\lambda v = Av$ und es ergibt sich:

Für $\lambda_1 = -k_1$ müssen wir das folgende LGS lösen:

$$\begin{aligned} -k_1 v_1 &= -k_1 v_1 \\ -k_1 v_2 &= k_1 v_1 - k_2 v_2 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung liest man ab, daß v_1 beliebig ist und aus der zweiten folgt $v_2 = k_1/(k_2 - k_1)v_1$. Mit unserer Konvention (s. B10A2) ist dann $v = (1, k_1/(k_2 - k_1))^t$.
Für $\lambda_2 = -k_2$ haben wir folgendes LGS:

$$\begin{aligned} -k_2 v_1' &= -k_1 v_1' \\ -k_2 v_2' &= k_1 v_1' - k_2 v_2' \end{aligned}$$

Da n.V. $k_1 \neq k_2$ ist, muß $v_1' = 0$ gelten und wir haben sofort $v' = (0, 1)^t$.

Damit haben wir eine Lösung für $z(t)$. Da beide λ gleichwertig sind, muß $z(t)$ als Linearkombination beider geschrieben werden:

$$z(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1} \end{pmatrix} \exp(-k_1 t) + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-k_2 t). \tag{3}$$

Mit dem AWP $z(0) = (r_0, 0)^t$ ergibt sich aus Gleichung (3) folgendes für die beiden Konstanten c_1 und c_2:

$$z(0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{k_2-k_1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c_1 = r_0 \text{ und damit } c_2 = -r_0(\frac{k_1}{k_2-k_1}).$$

Lösung: Aufgabe 4

(a) Wir gehen nach dem Schema von Aufgabe 3 vor und verwenden zudem zur Berechnung der Eigenvektoren noch den (a)-Teil von Aufgabe 2.

Es ist wie in Aufgabe 3 ein $z(t) = (x(t), y(t))^t$ zu definieren, welches dann mit einem allgemeinem Exponentialansatz auf ein Eigenwert-/vektorproblem führt:

$$\frac{dz}{dt} = Az \text{ mit } z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; A := \begin{pmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsansatz $z(t) = v \exp(\lambda t) \Rightarrow \lambda v = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{k}, \; \lambda_2 = -i\sqrt{k}$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{k} \end{pmatrix}, \; v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_k(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{k} \end{pmatrix} \exp(i\sqrt{k}t) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{k} \end{pmatrix} \exp(i\sqrt{k}t).$$

Da die Eigenwerte rein imaginär sind, ist die Lösung oszillierend.

(b) Da hier keine Anfangsbedingungen gegeben sind, bleiben die Parameter $c_1, \; c_2$ weiterhin unbestimmt. Da zudem $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ bekannt ist, sei hier die Lösung nicht angegeben.