# Blatt 1 – Musterlösung

## Aufgabe 1:

**Aufgabe**
*Die Puppen einer Schmetterlingsart werden in einen Brutschrank gebracht. Bei der Temperatur von 20°C dauert das Puppenstadium durchschnittlich 30 Tage, bei 21°C sind es 26.4 Tage und bei 22°C nur noch 22.5 Tage. Approximiere die Dauer des Puppenstadiums in Abhängigkeit von der Temperatur durch ein Polynom zweiten Grades.*

[Auf dem Blatt war ein Zahlfehler und ich habe mich für das Temperaturtripel **(20,21,22)** entschieden.]

**Mathematischer Hintergrund: Interpolation**
Es sind drei „Temperatur-Zeit"-Punkte gegeben; **(20,30)**, **(21,26.4)** und **(22,22.5)**. Das ein Zusammenhang zwischen zunehmender Temperatur und abnehmender Entwicklungsdauer besteht, liegt nahe. Die Biologie kennt ja Faustregeln wie diese (**RGT-Regel**).

Also einmal angenommen, dies sei so, dann kann man wohl in etwa abschätzen, was für 25°C oder andere Temperaturen geschieht oder aber auch bei 21.5°C. Man nennt diese Schlußweise eine **Interpolation**, wenn der zu ratende Wert innerhalb des Messbereiches (hier: 20-22°C) liegt (also die T = 21.5°C) und **Extrapolation**, liegt er außerhalb (T = 25°C > 22°C). Letztere interessiert uns gerade aber nicht. Beide werden sicher nicht exakt sein, kennt man die „wahre Formel" nicht. Leider gibt es diese oft gar nicht.

Aber: Eine Interpolation ist ja mindestens von den vorhergehenden bzw. nachfolgenden Werten „eingesperrt", geht man davon aus, daß es keine Oszillationen gibt. Hingegen kann die Extrapolation nur durch eine Tendenz, die die Meßwerte vorgeben, bestimmt sein.

**Mathematischer Exkurs: Interpolation durch Polynome**
In der Mathematik gibt es einige wichtige Funktionen, welche immer wieder benutzt werden, um Sachverhalte zu beschreiben („**modellieren**"), darunter auch die **Polynome**.

Polynome sind etwa $\mathbf{f(x) = 1 \cdot x^2\ (+\ 0 \cdot x) + 1\ (\cdot\ x^0)}$ und $\mathbf{g(x) = 1 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 13}$. Allgemein sind es Potenzen von **x** mit gewissen Vorfaktoren („**Koeffizienten**"). Bedeutend ist das **x** mit der höchsten Potenz, diese bestimmt den **Grad des Polynoms**. Bei uns sind die Koeffizienten für **f(x)**: 1,0,1 und für **g(x)**: 1,5,7,-13. Der Grad von f ist 2, der von g ist 3. Man überzeugt sich schnell (nachdenken!), daß die

**(1)** **Anzahl der Koeffizienten = (Grad + 1)**

ist, da jedem **x**, auch dem $\mathbf{x^0}$ (= 1), einer zukommt.

Will man nun die obigen drei Punkte „polynominterpolieren", so sollte man sich noch schnell eines klar machen: Eine Gerade (Polynom 1.Grades) ist durch zwei Punkte festgelegt, eine Parabel mit drei. Warum? Das sieht man an unserer Formel (1): Bei einem noch beliebigen Polynom zweiten Grades haben wir 3 = (2+1) noch nicht festgelegte Koeffizienten, zum Beispiel **a**, **b**, **c**: $\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$. Jeder Punkt bringt nun eine Information, d.h. (nachdenken!) er legt eine Zahl fest. Bei drei Punkten werden uns drei Bedingungen vorgegeben. Also sind Parabeln dadurch eindeutig festgelegt. Das erklärt die Angabe im Text. Wobei noch folgendes zu beachten ist: Hochgradige Polynome sind sehr anfällig, herum zu oszillieren. Deshalb sollte man sie nicht unüberlegt anwenden. Es gibt aber zum Beispiel aus kubischen Polynomen (also 3.Grades) stückweise zusammengesetzte Funktionen, die in der Praxis sehr häufig verwendet werden („Splines“).

**Lösung**
Die Lösung ist, weiß man, was man machen muß, immer nur Technik. Diese will natürlich auch beherrscht sein. Hier geht es so: Aufstellen eines **linearen Gleichungssystems** (**LGS**).

Damit die Parabel auch die Punkte verbindet, müssen diese auch auf ihr liegen. Ist also **f(x)** die Parabel, dann muß gelten: setze ich einen der in der Aufgabe gegebenen „Temperatur-Zeit“-Punkte ein, erfüllen sie die Gleichung, mit anderen Worten:

**$f(20) = 30$**, **$f(21) = 26.4$** und **$f(22) = 22.5$** mit **$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$**.

Schreibt man das untereinander, so ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c &= 30 \\ a \cdot 21^2 + b \cdot 21 + c &= 26.4 \\ a \cdot 22^2 + b \cdot 22 + c &= 22.5 \end{aligned} \qquad \text{oder in Kurznotation:} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 400 & 20 & 1 & 30 \\ 441 & 21 & 1 & 26.4 \\ 484 & 22 & 1 & 22.5 \end{array}\right)$$

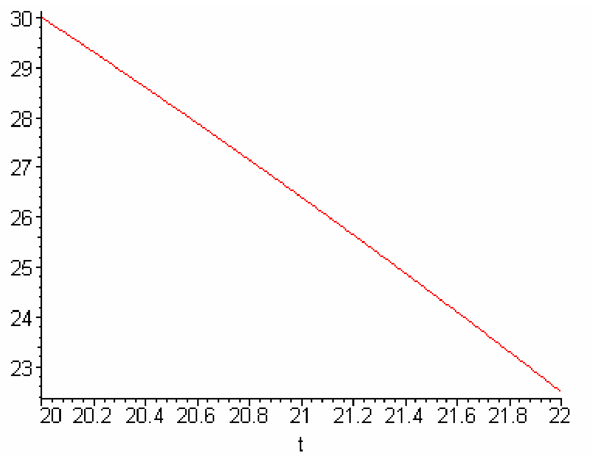
Nun wandelt man diese „**Matrix**“ nach gewissen Regeln um und bringt sie auf eine **(untere) Dreiecksform**;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Man kann dann einfach in der untersten Zeile anlesen, was **c** für einen Wert hat. Damit kann in der mittleren Zeile **b** bestimmt werden und letztlich **a** in der ersten.

Maple liefert: $-\frac{3}{80}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{99}{2}$

Eine Zeichnung dieser Kurve im uns interessierenden Bereich sei hier eingefügt:




Das ist die vollständige Lösung der Aufgabe: Dabei ist zu bedenken, daß unsere eigenen **Meßwerte nur durchschnittliche Werte** waren, wir sollten uns also nicht in Sicherheit wiegen, daß sie exakt ist. Aber das ist **Statistik** und wir behalten es nur im Hinterkopf.

## Aufgabe 2:

**Aufgabe**

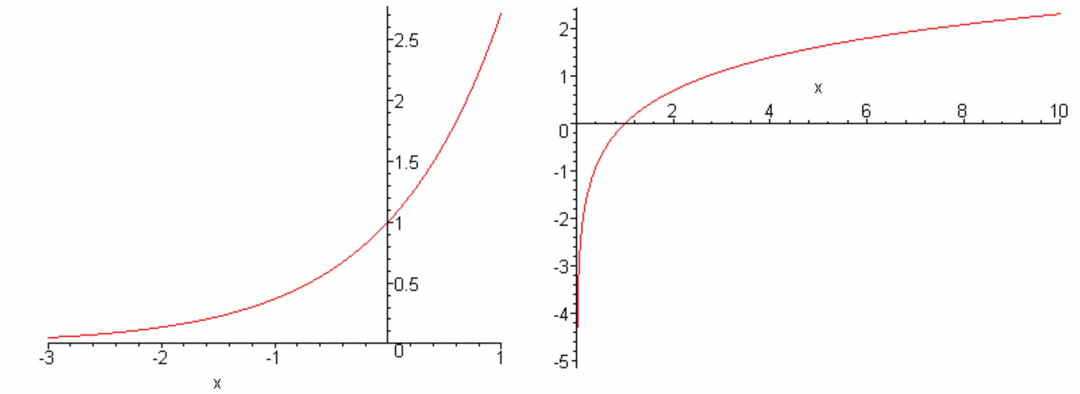
1. *Eine Bakterienkultur vermehrt sich pro Stunde um 60%. Zu Beginn seien 1000 Bakterien vorhanden. Wieviele sind es nach 9.3 Stunden?*
2. *2% einer radioaktive Substanz zerfallen pro Sekunde. Wann ist nur noch die Hälfte vorhanden?*

**Mathematischer Hintergrund: Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall**

Der echte Hintergrund davon kommt erst im Verlauf der Vorlesung. Das Stichwort **Differentialgleichung** sei hier aber genannt. Immer, wenn die Entwicklung einer Population (o.ä.) vom Ist-Zustand abhängt, kommen die sogenannten **Potenzfunktionen** ins Spiel. Die einfachsten haben folgende Form: $\mathbf{f(x) = a \cdot b^x}$. Gilt für die **Basis** $\mathbf{0 < b < 1}$, so handelt es sich um einen Zerfall, ist $\mathbf{1 < b}$, so wächst $\mathbf{f(x)}$ mit steigendem $\mathbf{x}$ über alle Grenzen. $\mathbf{a}$ ist hier der **Anfangswert**, denn es ist ja $\mathbf{f(0) = a}$. Oft schreibt man für $\mathbf{x}$ ein $\mathbf{t}$, denn wie in diesen Aufgaben variiert $\mathbf{x}$ oft in der Zeit.

**Mathematischer Exkurs: exp(x) und ln(x)**

Für unsere Belange reicht es aus, die **Schaubilder** (s.u., links **exp(x)**, rechts **ln(x)**) und die **Funktionalgleichung** zu kennen. Außerdem wissen wir, daß beide zueinander **invers** sind, also die **Umkehrfunktion** der jeweils anderen Funktion darstellen.




Die Funktionalgleichung lautet $\mathbf{\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}$. Aus dieser folgen gewisse Rechenregeln für beide Funktionen. Wichtig ist, daß sich jede Potenzfunktion mit einer anderen Basis als $\mathbf{e}$ sich umschreiben läßt in eine exp-Funktion. Denn es gilt $\mathbf{b = e^{\ln(b)}}$.

**Lösung**

<u>1. Aufgabenteil</u>

Wir setzen $\mathbf{a = 1000}$, da es anfangs 1000 Bakterien gibt. Da nach einer Stunde 1600 Bakterien vorhanden sein sollen, gilt noch: $\mathbf{1600 = f(1) = 1000 \cdot b^1}$. Damit ist $\mathbf{b}$ bestimmt zu $\mathbf{b = 1.6}$ und wir haben $\mathbf{f(x)}$ bestimmt. Rechnen wir noch $\mathbf{f(9.3)}$ aus, so erhalten wir als Lösung, daß es nach 9.3 Stunden etwa 79125.38... Bakterien gibt. Da nur ganze Bakterien existieren, rundet man auf **79125**. Hier ist vielleicht noch wichtig zu bemerken, daß auch „etwa 79000" eine gute Antwort darstellt, denn wahrscheinlich ist der Anfangswert fehlerbehaftet. Eine kleine Rechnung zeigt, gäbe es anfangs 1010 Bakterien, dann wären es etwa 79900 gewesen, was schon ein großer Unterschied ist.

<u>2. Aufgabenteil</u>

Hier bestimmt sich $\mathbf{b = 0.98}$ mit derselben Überlegung wie im ersten Teil der Aufgabe. Die Antwort auf die sog. **Halbwertszeit** liefert folgende Gleichung $\mathbf{0.5 \cdot a = a \cdot 0.98^x}$. Teilt man durch $\mathbf{a}$ und setzt $\mathbf{0.98 = \exp(\ln(0.98))}$, so findet man, daß nach 34,30... gerundet **34** Tagen die Hälfte der Substanz zerfallen ist.

# Aufgabe 3:

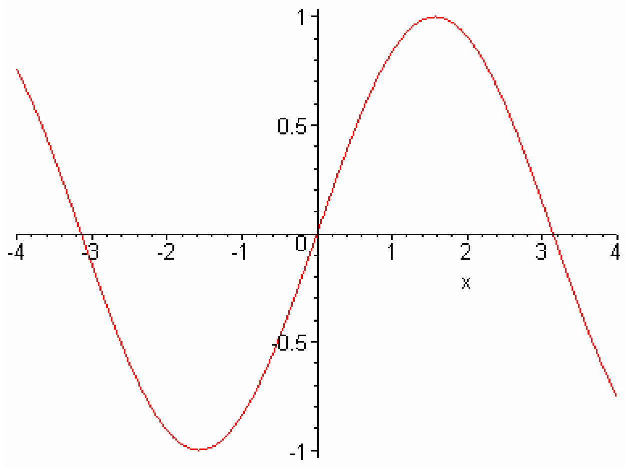
**Aufgabe**

*Mit Ebbe und Flut hebt und senkt sich der Grundwasserspiegel im küstennahen Erdreich. Der Unterschied zwischen Hoch- und Tiefstand betrage 38cm. Zur Zeit $t = 0$ sei Tiefstand und 12.42h später wird er zum nächsten Mal erreicht. Bei Tiefstand ist der Grundwasserspiegel 300cm unter der Erdoberfläche. Man gebe die Tiefe des Grundwasserspiegels an als Funktion des Typs $y(t) = m + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$.*

**Lösung**

*Bemerkung: die Einheiten sparen wir uns und überprüfen erst am Ende, ob sie stimmen.*

Wir haben aus dem Text also folgende Konstanten zu bestimmen: **m**, **A**, $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\varphi_0}$. Dabei nennt man **A Amplitude** und **$\boldsymbol{\omega}$ Kreisfrequenz**. Die beiden anderen haben keinen besonderen Namen, **m** verschiebt die Schwingung einfach nach oben/unten und $\boldsymbol{\varphi_0}$ verschiebt sie nach links/rechts. $\omega$ hängt mit der **Periodendauer T** wie folgt zusammen $\boldsymbol{\omega = 2\pi / T}$. Die **Breite der Schwingung** ist natürlich **2A**. Den Sinus zeichnen wir uns noch schnell hin:




sinus(x)

*„Der Unterschied zwischen Hoch- und Tiefstand betrage 38cm."* $\rightarrow 2A = 38 \rightarrow$ $\mathbf{A = 19}$.

*„Zur Zeit t = 0 sei der Tiefstand ... erreicht."* $\rightarrow$ sinus ist um $\pi/2$ nach rechts (oder um $3\pi/2$ nach links) verschoben $\rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi_0 = -\pi/2}$ (vergleiche Schaubild!).

*„...12.42h später wird er zum nächsten Mal erreicht."* $\rightarrow T = 12.42 \rightarrow$ $\boldsymbol{\omega = 2\pi / 12.42}$.

*„Bei Tiefstand ist der Grundwasserspiegel 300cm unter der Erdoberfläche"* $\rightarrow$ $\mathbf{y(0) = -300}$, wenn man die Nullmarke auf die Erdoberfläche legt. m finden wir nun auch schnell:
$y(0) = m + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = m + 19 \cdot \sin([2\pi / 12.42] \cdot t - \pi/2) \rightarrow -300 = m - 19 \rightarrow$ $\mathbf{m = -281}$.

Damit ist die Funktion bestimmt zu $\mathbf{y(t) = 19 \cdot \sin([2\pi / 12.42] \cdot t - \pi/2) - 281}$.

## Aufgabe 4:

**Aufgabe**
*Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Folgen:*

*1.* $a_n = a_0 \cdot q^n\ ,\ \ q \in R$

*2.* $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

**Mathematischer Hintergrund: Folgen**
**Folgen** sind **elementare Objekte der Mathematik**. In unserem Rahmen ist wichtig, daß Folgen zur Beschreibung von Abläufen in der Natur herangezogen werden können. Dazu siehe nächstes Übungsblatt. Meist interessiert der **Grenzwert**, wenn er existiert (die Existenz ist gegeben, wenn er **eindeutig** ist und unendlich viele der Folgeglieder beliebig nahe an ihm liegen). Existiert er, so nennt man die Folge **konvergent**, anderenfalls heißt sie **divergent**. Der Grenzwert gibt also an, wo die Folge von Zahlen hinmarschiert. Um mit Folgen klar zu kommen, sollte man sich immer einige der **Folgeglieder** hinschreiben. Folgen werden in zwei verschiedenen Darstellungsweisen geschrieben: es gibt **implizite (rekursive)** und **explizite** Folgen. Im obigen Beispiel ist **(1.)** eine explizite Folge, **(2.)** ebenso. Deren Vorteil ist es, daß man direkt und ohne Kenntnis der vorangehenden Folgeglieder das n. Glied berechnen kann. Die beiden Formen ineinander umzuwandeln, ist oft nicht trivial. Besonders **(2.)**, die **Fibonacci-Zahlen**, haben eine erstaunlich einfach rekursive Darstellung:

$$a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Wobei hier die explizite Formel die erste 1 unterschlägt.

**Lösung**
1. Aufgabenteil
$\mathbf{a_0}$ ist hier beliebig, aber fest. Für $\mathbf{a_0 = 0}$ ist die Folge unabhängig von q die **konstante Nullfolge**, jedoch wird für ein anderes $\mathbf{a_0}$ das **q** entscheidend für die Konvergenz der Folge.

Einmal angenommen, $\mathbf{a_0}$ und **q** sind fest, bsp. $\mathbf{a_0 = q = 2}$, so findet man sofort, daß bei $\mathbf{n} = \infty$ die Folge zu $\mathbf{a_0 \cdot q^{\infty}}$ wird. In unserem Beispiel ist das $\infty$. Aber für **q = 1** haben wir ein anderes Verhalten; dann ist der Grenzwert einfach $\mathbf{a_0 = 2}$. Geht man systematisch an die Aufgabe, so findet man dies:

Zuerst schreiben wir $\mathbf{a_0}$ schlauer: $\mathbf{a_0 = signum(a_0) \cdot |a_0|}$, was einfach heißt, daß diese Zahl **Produkt aus ihrem Vorzeichen** (-,+ oder 0) **und ihrem Betrag** ist, was übrigens für alle reellen Zahlen zutrifft. Dieser Schritt ist für das weitere Verständnis unerheblich, doch schreibt sich das endgültige Resultat dann einfacher.

Jetzt betrachten wir die Folge ohne das $\mathbf{a_0}$. Das **q** schauen wir uns betragsmäßig an: entweder ist **|q| = 1 oder |q| < 1 oder |q| > 1**. Beginnen wir mit

**|q| = 1**: dies erfüllen zwei Zahlen; q = 1 und q = -1.

> Für **q = 1** ist oben schon die Lösung angegeben; die Folge konvergiert gegen $a_0$, ja, es ist sogar die **konstante Folge** $\mathbf{a_0}$. Also liegt **Konvergenz** vor.
>
> Für **q = -1** haben wir ein **Sprungverhalten**; die Folge wird immer wieder mit **-1** multipliziert, ergo wechselt sie ihr Vorzeichen andauernd. Das nennt man **alternierend** und in diesem Fall ist der **Grenzwert nicht eindeutig**, denn es gibt ja zwei: **+** $\mathbf{a_0}$ und **-** $\mathbf{a_0}$. Also haben wir hier **Divergenz**.

**|q| < 1**: hier kann $q < 0$ oder $q > 0$ sein.

Für **0 < q < 1** findet man (vgl. Aufgabe 2.2) ein **schrumpfendes Verhalten**, es liegt **Konvergenz** vor und die Folge ist **eine Nullfolge, da ihr Grenzwert 0 ist**.

Für **-1 < q < 0** haben wir auch ein **schrumpfendes Verhalten**, jedoch haben wir wieder das **alternierende Vorzeichen**. Beachtet man aber, daß für die **positiven Folgeglieder** wie im oberen Fall **0 < q < 1** der **Grenzwert +0** ist und für die **negativen Folgeglieder der Grenzwert -0** ist, so haben wir doch noch **Konvergenz**. Der Grenzwert ist nämlich eindeutig. Die Folge hüpft zwar um die **0**, landet aber nur dort.

**|q| > 1**: auch hier kann $q < 0$ oder $q > 0$ sein.

Für **q > 0 wächst unsere Folge über alle Grenzen**, denn es wird ja eine positive Zahl immer wieder mit $q > 1$ multipliziert. Also liegt **Divergenz** vor.

Für **q < 0** haben wir sowohl wegen dem obigen Argument **grenzenloses Wachstum** als auch wegen dem **Sprungverhalten** eine **Divergenz**.

**Nun lassen sich die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} signum(a_0)\cdot\infty & |q|>1 \\ 0 \quad \textit{für} & |q|<1 \\ a_0 & q=1 \end{cases}$$ und für $q = -1$ haben wir alternierende Divergenz.

<u>Aufgabenteil 2:</u>
Der zweite Aufgabenteil ist nun schnell geklärt; die Folge $\mathbf{a_n}$ setzt sich ja aus **zwei Summanden** zusammen, welche wir **mit Aufgabenteil 1** getrennt untersuchen. **Der erste Summand** hat ein **q > 1** und **divergiert**, der zweite Summand hat ein **q < 1** und konvergiert. **Die gesamte Folge divergiert damit**.