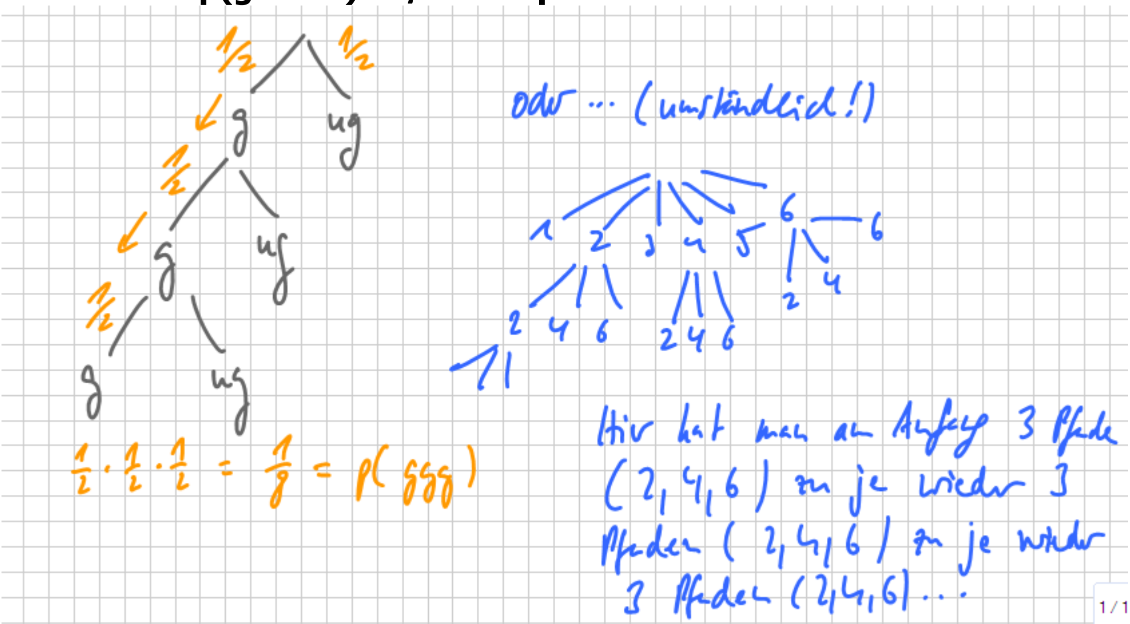
9a Mathe	2. Arbeit (28.01.2014)	10 nCr 5

1. Aufgabe – Kapitel 8
Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit…

a) nur gerade Zahlen zu würfeln?

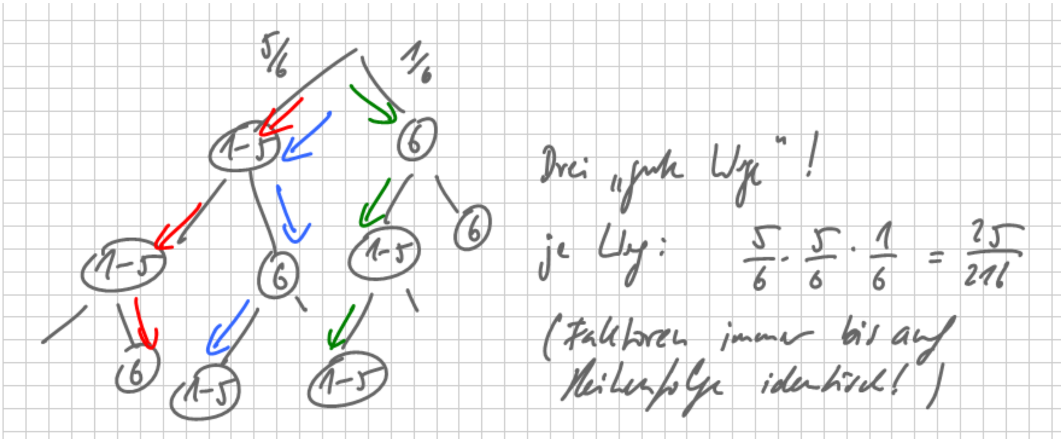
Wir stellen uns den Würfel unterteilt in gerade-ungerade zu je 3/6. Dann ist die Wahrscheinlichkeit p(gerade)=1/2. Den passenden Baum findest du links unten:



Wir gehen den Pfad links runter und multiplizieren (1/2) x (1/2) x (1/2) zu 1/8.
Nochmal zum verdeutlichen, dass dieser „Teilbaum" schlauer ist: Rechts ist der vollständige (auch nicht ganz…) Baum eingezeichnet. Beim ersten Wurf haben wir 3 verschiedene Möglichkeiten für einen Erfolg (2,4,6). Für jeden dieser Pfade teilt sich der Weg nochmals in 3 Teilwege auf mit dem zweiten Wurf. Macht bereits 3x3=9 Wege. Nun würfelt man wieder und ist mit 2,4,6 zufrieden. Sprich, nochmal 3 Teilwege für die 9 Wege. 27 Ausgänge, die einen zufriedenstellen. Da alle Ausgänge gleichwahrscheinlich sind und es insgesamt 6^3=216 Ausgänge gibt (da 3x ein 6seitiger Würfel geworfen wird), muss 27/216 auch 1/8 sein. Und das stimmt! Ist nur viel komplizierter…

b) genau eine 6 zu würfeln?

Wir unterteilen den Baum wieder. Dieses Mal in 6 oder keine6 zu je 1/6 bzw. 5/6 Wahrscheinlichkeit. Dann entsteht dieser Baum:



Wieder ist der Baum nicht ganz vollständig eingezeichnet, denn bspw. die Kombination 6, 6, keine6 interessiert uns ja überhaupt nicht…

c) die Kombination 1-2-3 zu erwürfeln? (Reihenfolge soll so sein!)

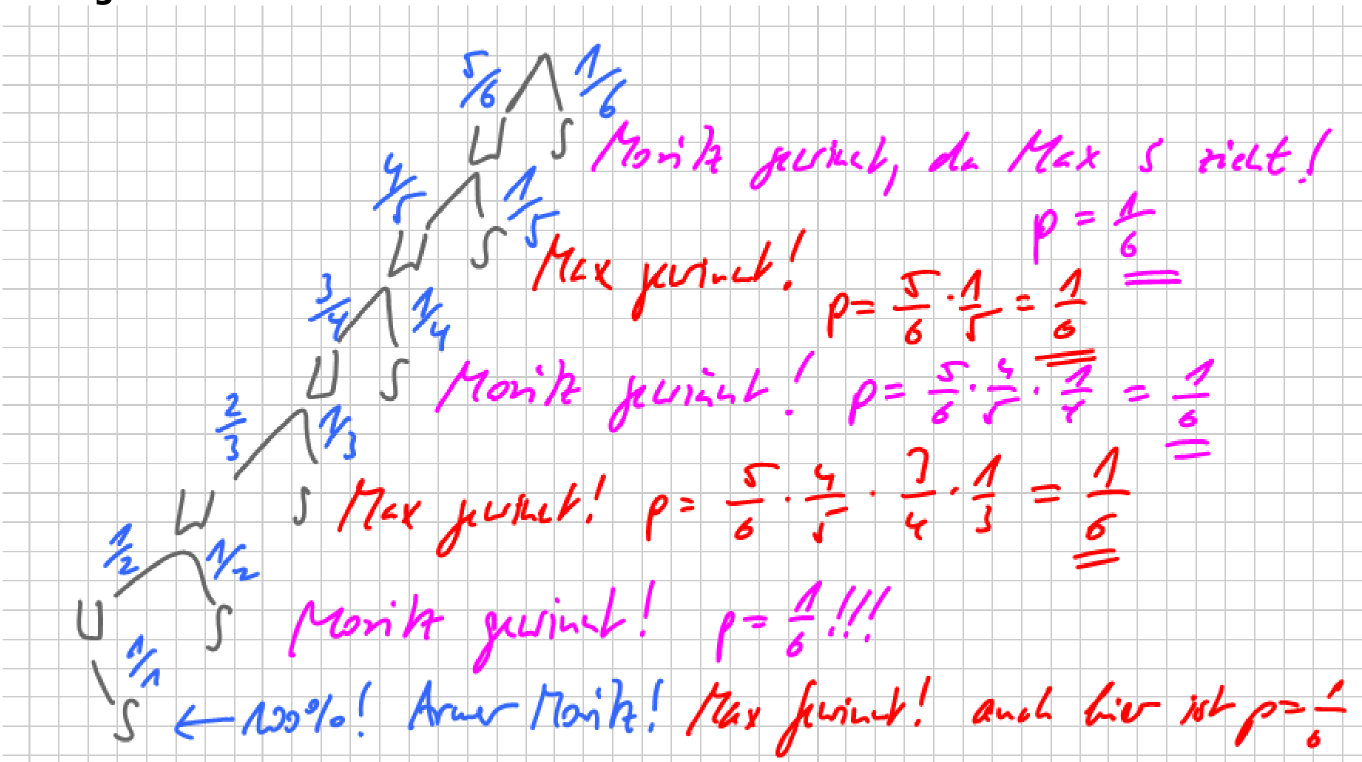
Diese genaue Kombination zu würfeln ist nur möglich, wenn man am Anfang die 1 schafft, dann die 2, dann die 3. Es gibt nur einen der 216 Pfade, der uns gefällt. Damit ist p(1-2-3)=1/216. Das bekommt man auch dadurch raus, dass man den Pfad entlang geht und 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216 berechnet.

2. Aufgabe – Kapitel 8

In einer Urne sind 5 weiße und eine schwarze Kugel. Max und Moritz ziehen abwechselnd jeweils eine Kugel. Wer die schwarze Kugel zieht, verliert.

a) Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler mit einem Baumdiagramm.

Wieder brauchen wir einen Baum. Intuitiv kommt man eher nicht zur richtigen Lösung



Der Baum endet zur rechten Seite direkt bei „s", denn dann hat jeweils der Spieler, der gerade gezogen hat, verloren. Im ersten Zug (p=1/6) ist das Max, dann Moritz, Max usw. Erstaunlich ist, dass jeder s-Ausgang p=1/6 besitzt! Denn man muss ja im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren, wenn man einen Pfad entlang geht. Insgesamt gewinnt jeder in 3/6 Fällen, also zu 50%.

b) Ist das Spiel fair? Erläutere dabei deinen Begriff für ein „faires Spiel".

Für mich ist das Spiel fair, denn beide gewinnen in 50% der Fälle! Alles andere wäre nicht fair.

3. Aufgabe – Kapitel 8 – Beweis
Beweise mit der Definition des Binomialkoeffizienten, dass die beiden folgenden Gleichheiten immer gelten:

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad\qquad \binom{n}{1} = n$$

Hier braucht man die Definition des Binomialkoeffizienten! Beispiel 5 über 3… Man teilt 5! durch 3! und noch durch 2!, denn 5-3=2. Allgemein ist ja:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

wobei in unserem Beispiel n=5 und k=3 waren.

Nun muss man beide Fälle einmal einsetzen: n=n und k=n. Ist komisch, aber schauen wir uns das mal an:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n})!}$$

Was steht da jetzt? Oben wie unten stehen n!, die kann man kürzen. Dann teilt man 1 durch (n-n)!, was 0! Ist. Hier musst du wissen, dass 0!=1 ist und so steht 1 da, genauso wie behauptet. Das war der Beweis!

Anschauung: Wir haben die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, aus einer n-elementigen Menge eine n-elementige Teilmenge zu ziehen. Da gibt's nur eine Variante; man nimmt alle Elemente…

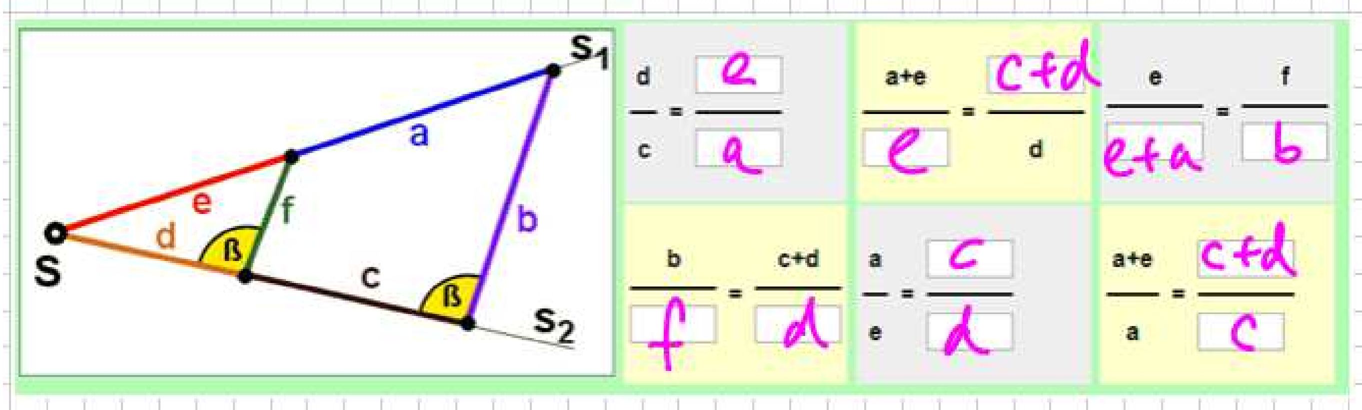
Nun zu n über 1:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{1}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}$$

Hier kommt n heraus. Wieso? (n-1)! enthält alle Faktoren, die auch n! enthält. Bis auf n selbst! Also ist n/1! = n/1 = n. qed.

4. Aufgabe – Kapitel 9
Trage die jeweils fehlenden Größen ein!

Hier eine mögliche Lösung:

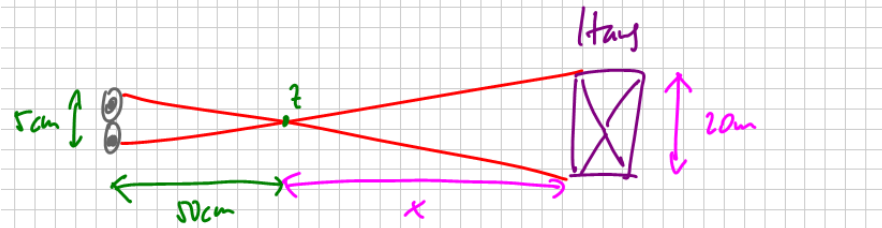


5. Aufgabe – Kapitel 9
Bearbeite Aufgabe 5 aus dem Buch, Seite 23!

Zu a): Der Punkt springt.

Zu b): Angenommen, der Augenabstand beträgt 5cm und der Arm ist etwa 50cm lang im ausgestreckten Zustand (siehe Abbildung im Buch).

Nun soll das Haus ca. 20m breit sein. Dann muss folgendes gelten:



Ähnlichkeit! $\frac{5cm}{50cm}$ wie $\frac{20m}{x}$

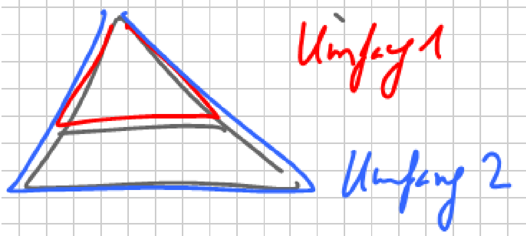
$\Rightarrow \frac{5}{50} = \frac{20}{x}$, x in Meter

$\frac{1}{10} = \frac{20}{x} \Rightarrow \underline{\underline{x = 200\,m}}$

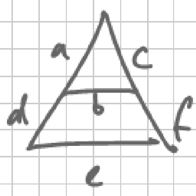
Die Rechnung war dann nicht mehr schwer. Die letzte Umformung habe ich übersprungen. Man nimmt die Gleichung erst mal x und erhält x/10 = 20 und dann mal 10 ergibt bereits x=200 (Meter). Das funktioniert, da zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke entstehen. Wenn man den Daumen genau in der Mitte hält.

6. Aufgabe – Kapitel 9
Bearbeite Aufgabe 3 aus dem Buch, Seite 89!

Zu a):



Es gilt wieder der Strahlensatz:



$\frac{a}{a+d} = \frac{c}{c+f} = \frac{b}{e}$

beispielsweise.

Damit der Umfang 1 nur $\frac{1}{3}$ vom Umfang 2 beträgt, muss jedes der obigen Verhältnisse $\frac{1}{3}$ betragen. Denn dann ist $\frac{1}{3} = \frac{a}{a+d} = \frac{c}{c+f} = \frac{b}{e}$ und auch die Summe Umfang 1 mit $a+c+b$ ist $\frac{1}{3}$ der größeren Summe Umfang 2 mit $(a+d)+(c+f)+e$!

Also ... $\frac{a}{a+d} = \frac{1}{3} \xRightarrow{\cdot(a+d)} a = \frac{1}{3}(a+d) \Rightarrow a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}d$

$\Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}d \quad |\cdot 3$

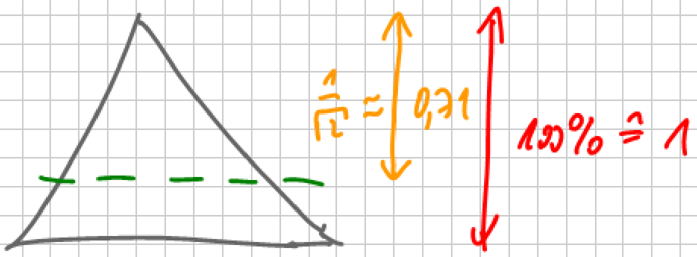
$\Rightarrow 2a = d$ → d ist doppelt so lang wie a ...

Es muss auf 2/3 der Gesamthöhe geschnitten werden!

Zu b):

Die Fläche ist ja das Produkt ½ mal Grundseite mal Höhe bzw. ½*g*h. Daher stimmt es nicht, einfach in halber Höhe zu schneiden. So wäre zwar die Höhe halbiert, die Grundseite aber leider auch… Die Fläche betrüge nur noch ¼ der Ausgangsfläche!

Richtig ist, das 1/Wurzel(2)-fache der Höhe zu belassen, also ca. 0.71. Das klingt schrecklich, funktioniert aber:



Was passiert jetzt? Die neue Höhe ist $h \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die neue Grundseite ist nach dem Strahlensatz auch $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot g$ (g ist die alte Grundseite). Damit ist die neue Fläche:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} g\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} h\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot h\right)$$

Zu c):

Solange man parallel zur Grundseite schneidet, gelten die Strahlensätze. Die Argumentation fußt auf diesen. Solange sie gelten, stimmt es! Damit stimmen die Aussagen für beliebige Dreiecke.

7. Aufgabe
Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\frac{2x+1}{3-x} = -1$ b) $x + \frac{2}{x} = 3$

Zu a):

$$\frac{2x+1}{3-x} = 1 \quad | \cdot (3-x)$$

$$2x+1 = 1\cdot(3-x)$$

$$2x+1 = 3-x \quad | +x$$

$$2x+1+x = 3$$

$$3x+1 = 3 \quad | -1$$

$$3x = 3-1$$

$$3x = 2 \quad |:2 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \frac{2}{3}}$$

Probe: $\frac{2\cdot\frac{2}{3}+1}{3-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{3}}{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = 1$. Passt ☺

Zu b):

$$x + \frac{2}{x} = 3 \quad | \cdot x$$

jeder Summand ↓ (Achtung! alles mal x!)

$$x^2 + 2 = 3x$$

$$x^2 + 2 - 3x = 0$$

(3x rüber → abc-Formel)

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

(sortiert!)

$a=1$, $b=-3$, $c=2$

Minus nicht vergessen!!!

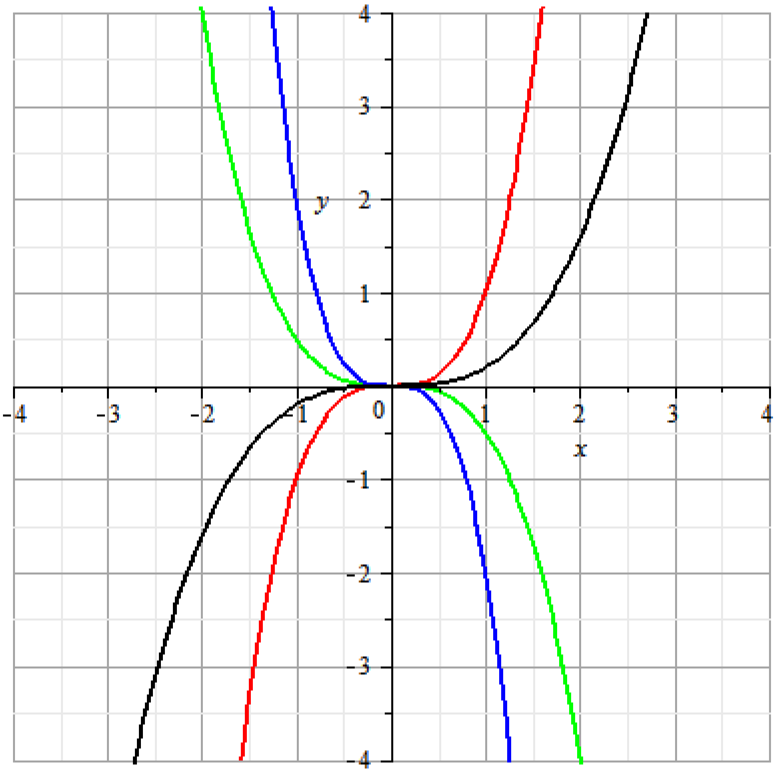
$$x_{1|2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

8. Aufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 2 mit diesem Zusatz: Durch welche Quadranten gehen die drei Potenzfunktionen jeweils?

Ich löse das mit Maple, da sieht man es am besten. Mit dem GTR nacheinander die Funktionen in Y= eintragen und im TABLE nachschauen (notfalls noch TABLE SET durchführen, um eine gute Schrittweite zu haben), welche Punkte so auf den jeweiligen Kurven liegen. Dann hat man es einfach, die Skizzen anzufertigen!



Hierbei sind die Kurven diese: rot für b=1, grün für b=-0.5, blau für b=-2 und schwarz für b=0.2.

Auswirkungen: Das Minuszeichen „klappt die Kurve an der x-Achse um“, sprich sie wird gespiegelt (alles, was negativ war, wird positiv – alles, was positiv war, wird negativ). Der Vorfaktor wirkt wie früher bei den Parabeln; die schwarze (b=0.2) steigt am flachsten an (ist am „weitesten“), die steilste („engste“) Kurve ist die blaue mit dem größten b=2 (vom Betrag, das Vorzeichen klappt ja nur).