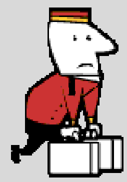
EI 10c M 2009 – 2010	MATHEMATIK # Zusammenfassung	

Übersicht

Da ich noch nicht durchgängig in der Kursstufe unterrichtet habe, ist diese Zusammenfassung **ein erster Versuch**, die wichtigsten Themen der Klassenstufe 10 (G8) zusammenzufassen. Ich habe mich dabei auch an den Inhalten der Webseite

http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/wadi9_2/

orientiert. Da nun erst einmal der G8+G9-Doppeljahrgang kommt, ist mir ehrlich gesagt nicht ganz klar, ob diese Zusammenfassung alles abdeckt.
Die Zusammenfassung gliedert sich in **zwei Teile**; im ersten Teil werden kurz die Ideen besprochen, es geht also primär um das **Verständnis**. Im zweiten Teil wird dann gezeigt, wie man diese Ideen mathematisch umsetzt, es geht hier um die für die Kursstufe notwendigen **Rechentechniken**. Ganz am Ende gibt es eine einseitige **Gesamtübersicht**. Es werden sowohl die Rechnungen **per Hand** als auch mit Hilfe des **GTR** besprochen. Für den Umgang mit dem GTR in der Kursstufe sei nochmal die Seite

http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/gkmathe/gtr/GTR_TI83Plus.pdf

empfohlen. Inhaltlich beschränke ich mich insgesamt auf die **Analysis**.

1. Teil:

- Funktionsbegriff, Darstellungsformen
- Funktionenzoo
- Änderungsrate, Differenzenquotient
- Differentialquotient, Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Besondere Punkte im Schaubild, Verhalten für betragsmäßig große x-Werte
- Kurvendiskussion

2. Teil:

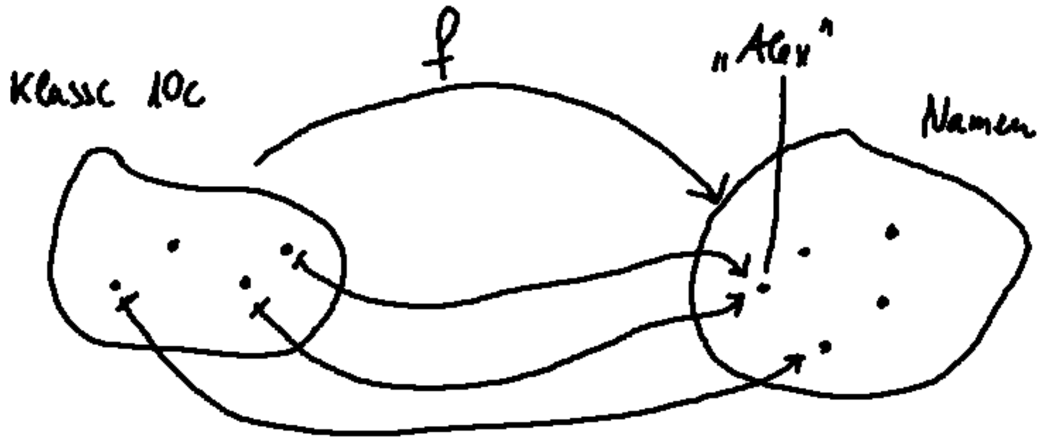
- Entscheiden, wann eine Funktion vorliegt und wann nicht.
- Finden von Definitions- bzw. Wertebereich von Funktionen. Notation dieser Mengen.
- Aufstellen von Funktionsgleichungen, Symmetrien
- Verschieben, Strecken, Spiegeln
- Aufstellen eines Differenzenquotienten, Übergang zum Differentialquotienten
- Ableitungsregeln
- Aufstellen von Tangente und Normale
- Bestimmen von Nullstellen
- Bestimmen von Extremstellen und Extrempunkten
- *Bestimmen von Wendepunkten (Zusatz wegen G9)*
- Finden von Symmetrien
- Verhalten für betragsmäßig große x-Werte
- Zeichnen von Schaubildern anhand der besonderen Punkte
- Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion
- Anwenden auf Extremalaufgaben

1. Teil

- **Funktionsbegriff, Darstellungsformen**

Ganz kurz: Eine Funktion ordnet einem x-Wert der Definitionsmenge genau einen y-Wert der Wertemenge zu. Eine Funktion ist über diese beiden Mengen und die Zuordnungsvorschrift f(x) eindeutig bestimmt. Auch das Schaubild bzw. eine Wertetabelle sind gleichwertige Darstellungen der Zuordnungsvorschrift.

In der Mathematik formalisiert man Zuordnungen. Dabei möchte man, dass eine Funktion **f** gewissen Größen einer Menge, beispielsweise Schülern der Klasse 10c, Elemente einer anderen Menge, beispielsweise der Menge aller Namen, eindeutig zuweist. Es darf passieren, dass zwei verschiedene Schüler denselben Namen zugeordnet werden, allerdings nicht, dass einem Schüler zwei Namen zugeordnet sind. Insoweit soll **f** eindeutig sein:



Im Mathematikunterricht beschränkt man sich dann eigentlich nur noch auf Funktionen, deren **Definitionsbereich** (Ausgangsmenge) wie auch deren **Wertebereiche** (Zielmenge) Zahlen sind. Allerdings ist das überhaupt nicht so einschränkend, wie man denken könnte. Die Klasse 10c ist nämlich auch über eine Klassenliste sortiert und so kann man jedem Schüler eine Platznummer zuweisen und das ist bereits eine einfache Zahl. Daher ist der Funktionsbegriff der Mathematik auch im Alltag sehr wichtig. Eine Funktion wird über mehrere Dinge bestimmt; ihren Def.bereich, ihren Wertebereich, ihren Funktionsterm und somit ihr Schaubild. Man kann auch eine Wertetabelle angeben. *Eigentlich sind zwei Funktionen nur gleich, wenn alle diese Eigenschaften identisch sind. So gesehen ist f(x) = x mit dem Definitionsbereich der natürlichen Zahlen eine andere Funktion als die Funktion g(x) = x, die alle Kommazahlen als Def.bereich verwendet.*

- **Funktionenzoo**

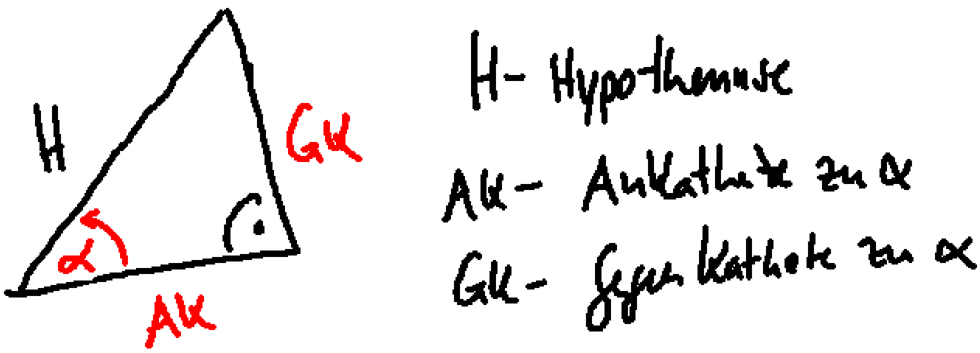
Ganz kurz: Es gibt eine Reihe von Funktionenklassen, die ähnliche Eigenschaften aufweisen. In der Schule sind das ganzrationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Wurzelfunktionen, Hyperbelfunktionen (1/x usw.) und die Exponentialfunktionen.
Ganzrationale Funktionen sind für viele Anwendungen die wichtigsten, die trigonometrischen Funktionen spielen in der Physik eine große Rolle und die Exponentialfunktionen in der Wirtschaftsmathematik und der Biologie. Der Logarithmus spielt in der Chemie eine gewisse Rolle.

Mit dem neu gewonnenen Funktionsbegriff kann man eine Reihe von früheren Zuordnung wie bspw. $y = 3x+4$ formalisieren. Im Folgenden die wichtigsten Funktionstypen:

- **Ganzrationale Funktionen**
  Wie die frühere Zuordnung $y = 3x+4$ formal zu $f(x) = 3x+4$ wird, kann man auch Parabeln wie $y = x^2$ zu $f(x) = x^2$ umschreiben usw. Dabei fasst man alle Funktionen der Bauart $f(x) = 1+x+x^2+5x^3$ zusammen. Diese Funktionen bestehen nur aus Konstanten und Potenzen (1,2,3,…) von x. Es lohnt sich, diese Funktionenklasse zu bilden, da sie eine Reihe gleicher Eigenschaften aufweisen. Mehr dazu später.

- **Wurzelfunktionen**
  Auch die Funktionen der Form $f(x) = \sqrt{x-1}$ fasst man wegen gleicher Eigenschaften zusammen und nennt sie Wurzelfunktionen.

- **Trigonometrische Funktionen**
  Die trigonometrischen Funktionen sind Sinus, Cosinus und Tangens. Hier muss man etwas ausholen. Wir kennen vom rechtwinkligen Dreieck diese Bezeichnungen:



  Dabei ist zu beachten, dass das Dreieck rechtwinklig ist und die Bezeichnungen „An" bzw. „Gegen" vom Winkel abhängen. Der Gegenwinkel zu Alpha wäre hier der Winkel oben in der Ecke und dann wäre die hierzu „neue Gegenkathete" die ehemalige Ankathete!
  Schon in der Antike war bekannt, dass das Verhältnis AK/GK bei festem Winkel nicht mehr von der Länge der Hypothenuse abhängt. Es ist also egal, wie groß das Dreieck ist; man kann es „aufblasen" oder „einschrumpfen" – es behält alle wichtigen Eigenschaften. Nur deswegen ist es möglich, maßstäblich zu zeichnen wie in GPS-Geräten, bei googleMaps oder in einfachen Straßenkarten. Auch Grundrisse von Gebäuden lassen sich so einfach entwickeln: Man kann ohne großen Auwand auf Papier Ideen entwickeln oder verwerfen. Wegen der Bedeutung dieses Verhältnisses bekam es einen Namen; der **Tangens** zum Winkel Alpha. Nicht nur dieses Verhältnis bleibt fest, auch GK/H und AK/H, **Sinus** und **Cosinus** genannt, sind unabhängig von der Dreiecksgröße. Man könnte bereits hier eine Cosinusfunktion entwerfen, indem man jedem Winkel Alpha sein Verhältnis AK/H im rechtwinkligen Dreieck zuordnet. Allerdings möchte man gerne einen größeren Def.bereich haben. Und so führt man das Bogenmaß ein: Schlägt man einen Kreis mit Radius 1 („Einheitskreis"), so kann man den Winkel Alpha auch mit dem entsprechenden grünen Kreisbogen identifizieren:

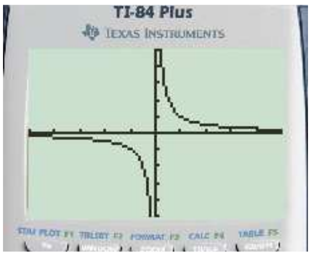
  http://www.steffen-haschler.de/schule/geogebra/einheitskreis/sincostan.html

  Das ist insoweit praktisch, als dann der Defintionsbereich auch ein reiner Zahlenbereich wird (vorher waren es ja Gradzahlen von 0° bis 90°). Der Bogen hat eine Länge von 0

bis zu einem Viertel des Gesamtumfangs und der ist bei Kreisen 2πr mit Radius r. Im Einheitskreis ist r=1 und so ist der Bogen bis zu $\pi/2$ lang. Man kann hier die Frage stellen, welches Verhältnis man einem längeren Bogen als $\pi/2$ zuordnen kann. Und so erweitert sich der Definitionsbereich der Bogenlänge auf 2π. Man muss allerdings auch negative Streckenverhältnisse akzeptieren. Wenn man nun noch bemerkt, dass eine Bogenlänge, die länger als 2π ist, einfach ein Umrunden der Kreislinie bedeutet und so sich die Verhältnisse einfach immer wiederholen, hat man für **alle Zahlen** eine Cosinusfunktion definiert! Die Funktionswerte liegen übrigens immer zwischen 1 und -1. Überprüfe das alles anhand des Applets; der Punkt P lässt sich mit dem Mauszeiger bewegen.
Eine Umrechnung von Alpha in den Bogen b ist sehr einfach, denn es gilt auch hier eine Verhältnisformel: **Alpha/360° = b/2π**. Denn der Anteil Alpha am Vollwinkel 360° ist derselbe Anteil wie der entsprechende Bogen zum Gesamtumfang. Ist b gegeben, löst man nach Alpha auf und umgekehrt.

- **Exponentialfunktionen**
  Eine Zuordnung $y = 2^x$ nennt man eine Exponentialfunktion, da die Variable x im Exponenten steht (2 heißt Basis). Die zugehörige Funktion wäre $f(x) = 2^x$ und diese Funktion ist bei Wachstumsprozessen sehr wichtig. Diese Funktionsklasse hat übrigens **keine Nullstellen**, denn für x=0 wäre f(x)=1. Nur für sehr negative Zahlen schrumpfen die Werte f(x) gegen Null, jedoch ohne sie zu erreichen. Dabei nennt man dann die x-Achse eine **Asymptote**, da das Schaubild der Funktion ihr beliebig nahe kommt, ohne sie eben jemals zu erreichen.

- **1/x und 1/x²**
  Die beiden Funktionen f(x) = 1/x und g(x) = 1/x² ähneln ganzrationalen, sind aber keine. Man kann sie zwar umschreiben zu $f(x) = x^{-1}$ bzw. $g(x) = x^{-2}$, sieht dann aber auch, dass die Hochzahlen negativ sind und das ist bei ganzrationalen Funktionen nicht erlaubt. Diese Funktionen versteht man schnell, wenn man sich überlegt, was sie anstellen. f(x) beispielsweise dreht einfach nur die Zahl „um" und macht aus ihr ihren Kehrwert. Aus 100 wird 1/100, aus 0.1 wird 10. Damit werden winzige Zahlen riesig und riesige Zahlen winzig. Die Null ist nicht im Definitionsbereich, denn dann würde man durch Null teilen, was für uns nicht sinnvoll ist. Es ergibt sich dann dieses typische Schaubild:

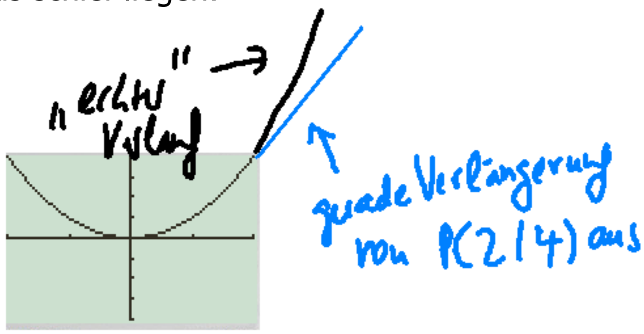


- **<u>Änderungsrate, Differenzenquotient</u>**

Ganz kurz: Betrachtet man einen Funktionswert zu einem festen x-Wert x1, dann gibt der Differenzenquotient die (durchschnittliche) Änderungrate m bezogen auf einen 2. x-Wert x2 an:

$$m = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$$

Oft fragt man sich, wie eine Entwicklung (beispielsweise das Wetter, der Aktienmarkt oder die Ausbreitung der Schweinegrippe) verlaufen wird. Man hat dazu Daten gesammelt (bspw. die Aktienkurse der vergangenen Wochen) und möchte nun sinnvoll raten, was passiert. Eine wichtige Entscheidungsgröße ist hier dann die Tendenz, also die Änderung der letzten Tage. War der Aktienkurs am fallen, erwartet man das eher auch für die Zukunft. Da man diese Auswertungen mit Mathematik macht, wird es sehr interessant, auf Schaubilder zu schauen und zu „raten", was passiert. Betrachten wir bspw. die Gerade f(x)=2x, dann wird es sehr einfach. Angenommen, wir haben eine Wertetabelle bis hin zu x=2. Dann malen wir das Schaubild, verlängern die Gerade und wissen sofort alle zukünftigen Funktionswerte. Bei einer Parabel könnten wir da schon etwas schief liegen:



Wieso geht in diesem Fall unsere Idee eigentlich schief? Und so lohnt es sich, einmal genauer hinzuschauen. Die Grundidee ist sehr gut; wir nähern eine Kurve mit einer Geraden an. Im Bild zu erkennen ist ja auch, dass der Unterschied am Anfang noch nicht so groß ist. Erst etwas weiter draußen wird es schlichtweg falsch. Daher sollten wir uns wohl auf kleine Vorhersagen beschränken. Daher gibt es übrigens auch nicht im Sommer Wettervorhersagen für Sylvester. Mathematisch formal findet man, dass die Änderung einer Funktion als Quotient der y-Werte zu den x-Werten beschrieben werden kann wie es mit der Steigung m bei Geraden der Form y=mx+c gemacht wird. Für unser f(x) = x² ist dann die Änderung des Funktionswerts von P(1|1) zu Q(2|4) eben (4-1)/(2-1) = 3/1 = 3. So kommt man auch auf die blaue Gerade. Hätte man aber die Änderung von Q(2|4) zu R(3|9) betrachtet, so hätte man als „Steigung" (9-4)/(3-2) = 5/1 = 5 gefunden. Die Steigung ändert sich offensichtlich bei Parabeln ständig, je nachdem, wo man sitzt und welchen Bereich man betrachtet. So wäre die Änderung von Q(2|4) auf S(2.5|6.25) „nur" 4.5 gewesen. Diese Brüche nennt man ganz anschaulich **Differenzenquotienten** oder auch **durschnittliche Änderungsrate**. Was ist nun aber die exakte Steigung (**momentane Änderungsrate**) im Punkt Q(2|4)? Mit ihr könnte man wohl die besten Vorhersagen machen.

- **<u>Differentialquotient, Ableitungsfunktion</u>**

Ganz kurz: Lässt man beim Differenzenquotienten das x2 gegen das x1 gehen, dann geht m in die momentane Steigung über, die wir mit f '(x) bezeichnen. x2 schreibt man dann oft als x1+bissl und das bissl wird mit h abgekürzt:

$$f'(x1) = \frac{f(x1+h) - f(x1)}{h}$$

Man kann dann jedem x-Wert sein f'(x) zuordnen und nennt das dann die Ableitung(sfunktion).

Um die momentane Änderungsrate zu finden, muss man ja eigentlich nur immer weiter an die Stelle x=2 hineinzoomen. Dafür nehmen wir uns einfach die Stelle 2+"ein bissl" und untersuchen die Änderung für den Funktionswert. Das „ein bissl" wird gerne mit h abgekürzt. Dann ist die mittlere Änderungsrate wie vorher gesagt in diesem Fall

$$m = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h)-2} = \frac{(4+4h+h^2)-4}{h} = 4+h.$$

Nun ist für h=1 die Stelle 2+h die Zahl 3 und hier erhält man sofort m=5 wie oben auch. Auch für h=0.5 findet man sofort m=4.5 wie oben! Was ist aber für h=0.000000001?! Dann sind wir schon sehr nah an der 2 dran und die Steigung ist dann 4.000000001. Für immer kleineres h wandert 2+h auf 2 zu und die Steigung geht gegen 4. Und daher weist man der Stelle x=2 bei der Normalparabel f(x)=x² die Steigung 4 zu. Diese neue Zuweisung ist wieder eine Funktion und heißt die **Ableitungsfunktion** oder kurz die **Ableitung von f an der Stelle x**. Man kann so jedem Punkt jeder Funktion eine Steigung zuordnen.

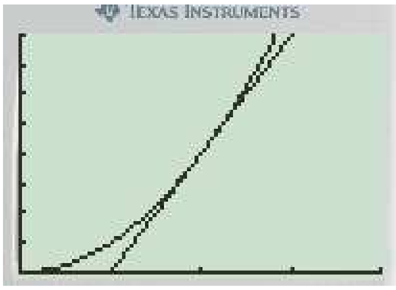
- **Tangente und Normale**

Ganz kurz: Die Tangente an einem Punkt P(x1|y1) einer Funktion f hat die Steigung m=f '(x). Die Normale hat den negativen Kehrwert dieser Steigung. Es gibt zwei einfach Formeln für diese Geraden:

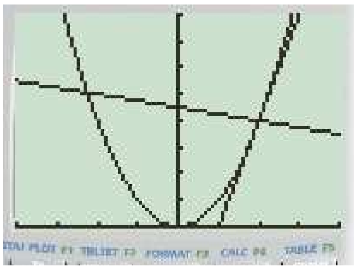
$t\colon\ y = f'(x1)(x - x1) + y1$ *bzw.* $n\colon\ y = -\frac{1}{f'(x1)}(x - x1) + y1$

Tangentengleichung *Normalengleichung*

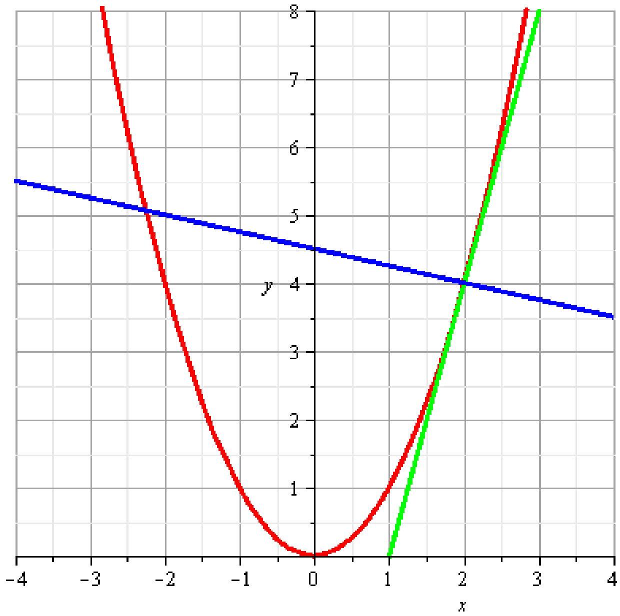
Wir können nun für einen kleinen Bereich unsere Parabel linear fortsetzen, indem wir die Steigung 4 im Punkt 2 weitergehen. Um das zu zeichnen und so zu überprüfen, wie gut das funktioniert, müssen wir eine Geradengleichung aufstellen, die die Steigung 4 besitzt **und** durch den Punkt Q(2|4) geht. Formal: m=4, also g(x) = 4x+c. Da Q auf der Geraden liegt, muss g(2)=4 gelten. Wegen 4 = 4·2+c muss c = −4 sein. Zeichnen wir f und g mit dem GTR:



Das sieht ziemlich gut aus. Was haben wir noch einmal gemacht? Wir haben uns vorgestellt, wir wüssten nicht, wie die Parabel für Werte x>2 weitergeht, aber wir haben versucht, zu raten, wie es weitergeht und das mit der Steigung im Punkt 2. Diese haben wir am Anfang (Differentialquotient) nicht eindeutig bestimmen können. Nachdem wir dieses Problem im Griff hatten, haben wir nun eine Gerade gefunden, die etwas weiter von x=2 entfernt sehr gute Vorhersagen macht. Da diese Gerade eine sehr große Bedeutung hat, hat auch sie einen eigenen Namen und heißt **Tangente**. Man findet übrigens eine ganz praktische Formel für diese Tangenten: Für eine Funktion f und einen Punkt Q(a|b) ist die entsprechende Tangente diese Gerade: $y = f'(a) \cdot (x - a) + b$. Für unseren Fall wäre nach dieser Formel mit f '(x) = 2x die Tangente y = 4(x-2)+4=4x-8+4=4x-4. Das passt. Übrigens kann man ganz einfach eine Gerade aufstellen, die rechtwinklig auf der Tangenten steht und durch denselben Punkt Q geht. Die Gleichung dieser sogenannten **Normale** ist allgemein $y = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + b$ bzw. für unseren Fall $y = -\frac{1}{4}(x-2)+4 = -0.25x + 0.5 + 4 = -0.25x + 4.5$. Überprüfen wir erneut mit dem GTR:



Sieht ganz ok aus, aber nicht wirklich rechtwinklig. Ist etwas falsch? Ja und nein. Der GTR hat kein quadratisches Display und so verzerrt er das Ergebnis! Mit Maple sieht es besser aus:



- **<u>Besondere Punkte im Schaubild, Verhalten für betragsmäßig große x-Werte</u>**

Ganz kurz: Die Tangente an einem Punkt P(x1|y1) einer Funktion f hat die Steigung m=f '(x). Die Normale hat den negativen Kehrwert dieser Steigung. Es gibt zwei einfach Formeln für diese Geraden:

$t\colon\ y = f'(x1)(x - x1) + y1$ *bzw.* $n\colon\ y = -\frac{1}{f'(x1)}(x - x1) + y1$

Tangentengleichung *Normalengleichung*

Wenn man erst einmal den Funktionsbegriff hat, fragt man sich bald, was eigentlich der Funktionsterm, also bspw. $f(x)=x^2$, so alles über die Funktion aussagen kann. Auch das Schaubild ist interessant, denn ab einem gewissen Bereich ist meistens „eh klar“, wie die Funktion weiter verlaufen wird und man sieht Hochpunkte, Tiefpunkte und natürlich die Nullstellen. Da Term und Schaubild sehr eng miteinander zusammenhängen, ist es möglich, Besonderheiten in beiden Objekten zu finden. Insgesamt unterscheiden wir folgende Stellen bzw. Punkte:

- **Nullstellen**: Hier gilt f(x)=0, das Schaubild schneidet oder berührt die x-Achse.

- **Extrempunkte** bzw. Hoch- und Tiefpunkte: f'(x) = 0 und bei einem Vorzeichen-wechsel von + nach – ist es ein Hochpunkt, bei einem VZW von – nach + ein Tiefpunkt.
- **Sattelpunkt**: f'(x)=0, aber die Ableitungsfunktion wechselt ihr Vorzeichen **nicht**. Die Ableitungsfunktion berührt somit bei x die x-Achse ohne sie zu schneiden. Ein Sattelpunkt ist ein spezieller Wendepunkt.
- **Wendepunkte**: Hier wendet sich die Kurve. Fährt man Fahrrad auf dem Schaubild (wir sehen das aus der Vogelperspektive), dann muss man an einem Wendepunkt den Lenker umlenken, um die nächste Kurve zu nehmen. Hier muss f''(x)=0 sein und die zweite Ableitung (die Ableitung der Ableitung) muss das Vorzeichen wechseln (Richtung egal, Hauptsache nicht von + nach + bzw. – nach –).
- „**Verhalten |x| gegen unendlich**": Für betragsmäßig große (was ist das?! einfach sehr große positive Zahlen wie 100.000 und sehr negative Zahlen wie -10.000) x-Werte sehen die meisten Kurven sehr langweilig aus. Sie gehen oft gegen einen festen Wert, der auch „Unendlich" sein kann.
- An dieser Stelle kann man auch schon auf Symmetrien eingehen, denn häufig sind Schaubilder von Funktionen symmetrisch. In der Schule beachtet man Symmetrien zur y-Achse und Punktsymmetrien zum Ursprung U(0|0). *Wieso kann eine Funktion nie zur x-Achse symmetrisch sein? Weil es dann nach Definition keine Funktion mehr wäre. Jedem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet. Es gibt nur eine Ausnahme: die Funktion f(x)=0.*

- **<u>Kurvendiskussion</u>**

Ganz kurz: Erst einmal Defintionsbereich und Wertebereich auf Probleme untersuchen (wann teile ich durch, wann wurzele ich eine negative Zahl?), gibt es Symmetrien?, dann Nullstellen berechnen (Ausklammern, Umformen, Substitution, abc-Formel, Raten), Ableiten, f'(x)=0 lösen (also wieder Nullstellen bestimmen), auf Vorzeichenwechsel testen und so HP/TP bestimmen, ggf. Wendepunkte bestimmen und dazu wieder ableiten und f''(x)=0 lösen (also wieder Nullstellen bestimmen) und auch hier auf Vorzeichenwechsel testen. Dann noch Zeichnen, fertig. ***Hier siehst du, wie wichtig die Technik der Nullstellenbestimmung ist!***

Eine Kurvendiskussion untersucht nacheinander

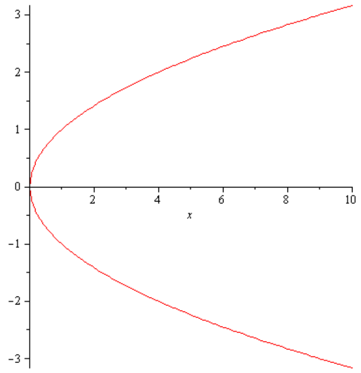
- *nicht immer:* den Defintionsbereich und den Wertebereich einer Funktion
- Symmetrien (zur y-Achse bzw. zum Ursprung)
- Nullstellen
- Extremstellen
- *G9:* Wendepunkte (ist ja auch nicht so schwer, einfach Extremstellen der 1. Ableitung finden)
- *Verhalten für |x| gegen Unendlich*: was macht die Funktion „weit draußen"
- *und am Ende kann man die Funktion noch zeichnen.*

2. Teil

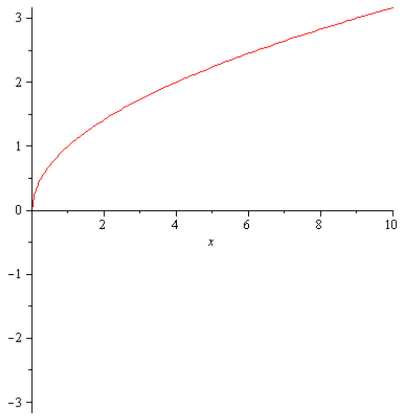
- **<u>Entscheiden, wann eine Funktion vorliegt und wann nicht.</u>**

Das muss man selten und wenn, dann bekommt man Schaubilder vorgelegt und soll argumentieren. Es gilt aber immer: ein x-Wert wird genau einem y-Wert zugeordnet, alles andere ist halt keine Funktion.

Beispiel



Ist das eine Funktion? Nein, denn einem x-Wert werden zwei y-Werte zugeordnet. Hieran sieht man, dass man keine direkte Funktion finden kann, die x ihrer Wurzel zuweist, denn das wäre dieses Schaubild. x=4 würde sowohl y=2, als auch y=-2 zugeordnet. Erst, wenn man den Wertebereich einschränkt und zwar ziemlich willkürlich auf positive y-Werte, klappt es:



Jetzt haben wir eine Funktion f, denn für jeden x-Wert gibt es nur einen y-Wert.

- **<u>Finden von Definitions- bzw. Wertebereich von Funktionen. Notation dieser Mengen.</u>**

Ganz kurz: Nie durch Null teilen oder aus einer negativen Zahl Wurzeln. Mengen entweder korrekt aufschreiben (ist manchmal ungewohnt und deshalb schwer) oder lieber mit Worten umschreiben, das ist auch richtig!

Üblicherweise ist der Definitionsbereich von f gegeben, manchmal wird nach ihm gefragt. Setze dazu Werte nahe der Null, sehr große positive wie negative Werte ein und schau, ob das funktioniert. Du solltest nicht durch Null teilen oder die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen. Darauf solltest du achten.

Beispiel
Nehmen wir die Wurzelfunktion von oben, $f(x) = \sqrt{x}$. Wie groß ist der maximale Definitionsbereich? Für x negative Werte einzusetzen macht keinen Sinn, alles andere geht.

Beispiel
Etwas komplizierter wird es beim Funktionsterm $f(x) = \sqrt{x-2}$. Große negative Zahlen klappen nicht, Null klappt nicht, aber auch bei Zahlen kleiner 2 geht es nicht mehr. Dies kann man nur finden, wenn man die Wurzel sieht und daran denkt, dass die Zahl unter der Wurzel (das ist x-2), größer als Null sein muss. x-2>0 bedeutet aber einfach x>2. Hier muss man sich etwas mit Ungleichungen auskennen. Falls die dir nicht mehr geläufig sind, solltest du sie dir etwas ansehen.

Um bei gegebenen Definitionsbereich den Wertebereich zu finden, muss man die erlaubten x-Werte in f(x) einsetzen und schauen, was passiert. Wenn es Definitionslücken gibt wie die 0 bei der Funktion 1/x, dann setze auch Werte nahe dieser Lücke ein.

Beispiel
Gegeben ist $f(x)=x^2$ für alle Kommazahlen (reelle Zahlen) x. Setzt man die Null ein und große negative wie positive Zahlen, erhält man immer positive Lösungen. Daher umfasst der Wertebereich alle positiven Zahlen und die Null. Weißt du nicht, wie man so etwas formal schreibt, dann schreibe es genau so hin, das ist auch richtig. Ansonsten wäre das der Intervall $[0,\infty)$ oder $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, je nachdem, wie ihr das schreiben wollt.

Beispiel
Für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ muss man erst einmal feststellen, dass x positiv sein muss, wegen der Wurzel. Außerdem darf der Nenner nicht Null werden und so darf $\sqrt{x} - 2$ nicht Null sein bzw. $\sqrt{x} = 2$ bzw. $x = 4$. Also muss man noch die Zahl 4 verbieten.

- **Aufstellen von Funktionsgleichungen, Symmetrien**

Ganz kurz: Im GTR über <MATRIX> alle Gleichungen eingeben und mit <rref(> lösen. Per Hand eine Gleichung nach einer Variablen einsetzen und das Ergebnis in alle übrigen Gleichungen einsetzen. So geht es weiter, bis nur noch eine Gleichung mit nur einer Variablen übrig ist. Diese bestimmen und rückwärts einsetzen.
*Symmetrien findet man sofort, wenn die Potenzen von x **nur gerade** sind (y-Achsensymmetrie) oder **nur ungerade** sind (Punktsymmetrie).*

Funktionen aufstellen kann man auch mit dem GTR. Zuerst per Hand. Wir suchen dazu eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den Nullstellen x=2 und x=0 und dem Hochpunkt bei P(1|4).

Per Hand
Ganzrational und 3. Grades bedeutet, die Funktion sieht aus wie $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Dabei wissen wir aber nicht, welche Zahlen a,b,c,d gemeint sind. Aber es gibt ja noch mehr Informationen. Nullstellen sind x=2 und x=0. Also gilt f(2)=f(0)=0. Also einmal 0=8a+4b+2c+d (wegen $2^3=8, 2^2=4$) bzw. 0=0a+0b+0c+d=d. Die zweite Gleichung ist schon ziemlich einfach, d=0. Also ist unsere Funktion von der Art $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Immerhin. Die erste Gleichung merken wir uns erst einmal mit der kleinen Abänderung d=0.

Dann lautet sie 8a+4b+2c=0. Dass bei x=1 ein Hochpunkt liegt, bedeutet f '(1)=0. D.h. aber, wenn wir unsere „Unbekannte" f(x) ableiten und 1 einsetzen, Null heraus kommt. f '(x)=3ax²+2bx+c und damit für x=1: 3a+2b+c=0. Wieder so eine Gleichung mit a,b und c. Noch eine Info ist bisher unausgewertet; P(1|4) liegt auf dem Schaubild von f. Damit muss f(1)=4 gelten: a+b+c=4. Mehr Infos bekommen wir nicht, doch es wird reichen (man braucht immer soviele verschiedene Gleichungen wie man unbekannte Zahlen hat). Notieren wir sie einmal übersichtlich:

(1)	8a +	4b	+ 2c	=	0
(2)	3a +	2b	+ c	=	0
(3)	a +	b	+ c	=	4

Hier gibt es nun viele Methoden, aufzulösen. Die Grundidee ist immer dieselbe. Man löst die erste Gleichung nach a auf und setzt das Ergebnis in (2) und (3) ein. Dann sind in (2) und (3) nur noch b und c übrig. Löst man dann (2) nach b auf und setzt das Ergebnis in (3) ein, dann bleibt nur noch c übrig und so kann man nach c auflösen. Kennt man c, kennt man mit (2) sofort b und mit beiden durch (1) sofort a. Es geht oft viel schlauer und schneller, aber das ist die Grundtechnik und die wird hier einmal vorgeführt:

8a+4b+2c=0 bedeutet a=-b/2-c/4. Also

(2)	3(-b/2-c/4)	+	2b + c	=	0
(3)	(-b/2-c/4)	+	b + c	=	4, etwas zusammengefasst also:

(2) wird zu	–3b/2 – 3c/4 + 2b + c = 0	bzw. zu	b/2+c/4 = 0	und
(3) wird zu	–b/2 – c/4 + b + c = 4	bzw. zu	b/2+3c/4 = 4.	

Die neue Gleichung (2) lösen wir nach b auf und finden b=–c/2. Nun ersetzt man alle bs in (3) mit –c/2 und erhält:

(3) –(–c/2)/2 – c/4 + (–c/2) + c = 4 und vereinfacht schließlich
(3) c/4 – c/4 – c/2 + c = 4 oder
(3) c/2=4 bzw. **c=8**.

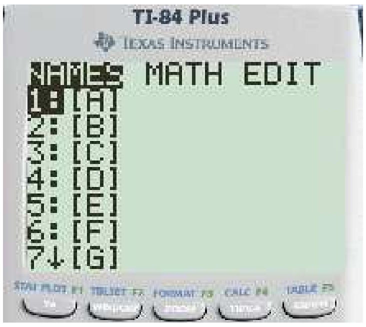
Jetzt wollen wir c=8 auswerten und hier merkt man, dass man lieber alle Gleichungen durchnummeriert, um die Übersicht zu behalten. Es geht aber dieses Mal auch so. Wir haben oben eine Gleichung (2), die b/2+c/4=0 lautet. Mit c=8 steht da aber einfach b/2+8/4=0 oder b/2+2=0 oder b/2=–2 oder **b=–4**. Mit c=8 und b=–4 finden wir mit jeder der Gleichungen auch a. Am einfachsten ist die Startgleichung (3): a + b + c = 4, denn hier wäre das dann: a + (–4) + 8 = 4 bzw. a + 4 = 4 oder **a=0**.

Also lautet f(x) = 0x³ – 4x² + 8x oder einfach f(x) = –4x² + 8x. Das ist aber witzigerweise keine Funktion 3. Grades, sondern eine 2. Grades. Es gibt daher keine Funktion 3. Grades, die die obigen Gleichungen erfüllt, außer, man lässt a=0 zu.

Diese ewige Rechnung macht der GTR ganz schnell. Man gibt einfach eine sogenannte Matrix in den GTR ein, die unsere drei Gleichungen repräsentiert, lässt das lösen und fertig:

Per GTR

<ON>, dann <2nd>+<x^{-1}> (also <MATRIX>) und erhält dieses Display:

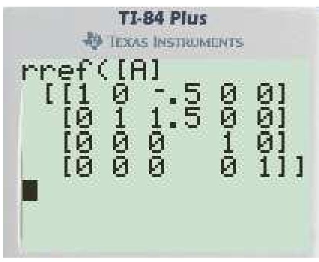


Jetzt kann man über <EDIT> und die <1> die Matrix A definieren. Wir haben 4 Zeilen und fünf Spalten, weil wir vier Gleichungen besitzen mit jeweils a, b, c, d als Unbekannten und den Konstanten rechts vom Gleichheitszeichen. Daher wählen wir 4 x 5. Man trägt nämlich in jede Zeile eine Gleichung ein und dabei nacheinander a, b, c, d und dann die Konstante. Noch einmal die Infos der Reihe nach:

$f(2) = 0$: $8a + 4b + 2c + 1d = 0$,
$f(0) = 0$: $0a + 0b + 0c + 1d = 0$,
$f'(1) = 0$: $1a + 1b + 1c + 0d = 0$ (hier ist das d beim Ableiten weggefallen!),
$f(1) = 4$: $1a + 1b + 1c + 1d = 4$.

Im GTR sieht das dann so aus (man sieht leider nicht alles…):

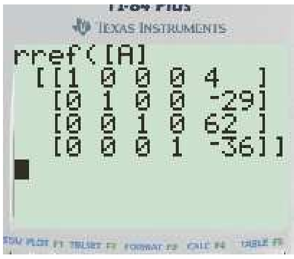
Nun gehen wir über <QUIT> (<2nd> + <MODE>) ins normale Menü und kann dann einen Befehl, <rref(>, aufrufen, der sofort das Gleichungssystem löst. Dazu gehen wir wieder in <MATRIX>, diesmal aber auf <MATH> und da sitzt er etwas weiter unten (unter B). Danach müssen wir A reinschreiben, was wieder über <MATRIX> und dann direkt <1> geht. Klammer zu, <ENTER> und fertig. Eigentlich. In diesem Beispiel liefert der GTR „Mist", weil es keine richtige Lösung gibt:



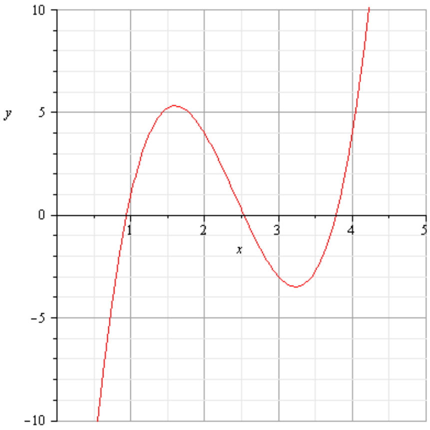
Normalerweise sieht es anders aus. Ein ganz einfaches Beispiel, wo es klappt: Wir suchen eine Funktion 3. Grades, deren Schaubild durch die Punkte P(1|1), Q(2|4), R(3|-3) und S(4|4) geht:

$f(1) = 1$: $1a + 1b + 1c + 1d = 1$,
$f(2) = 4$: $8a + 4b + 2c + 1d = 4$,
$f(3) = -3$: $27a + 9b + 3c + 1d = -3$,
$f(4) = 4$: $64a + 16b + 4c + 1d = 4$.

Das geben wir wieder in die (4 x 5)–Matrix ein und lösen mit <rref(>. Es ergibt sich dann:



Und hier kann man jetzt einfach ablesen. a=4, b=-29, c=62 und d=-36. Mit Maple sieht man schön, dass die Funktion $f(x) = 4x^3-29x^2+62x-36$ die richtige ist:



Per Hand hätte das ewig gedauert und man hätte sich wohl auch noch verrechnet…

Bei diesen Infos werden auch manchmal Symmetrie-Infos gegeben, wie bspw., dass die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist. Dann muss man wissen, dass alle Summanden mit ungeradem Exponenten von x (also x, x^3 usw.) rausfliegen. Bei einer Punktsymmetrie fallen alle Summanden von x mit geradem Exponenten (also Konstanten, x^2 usw.) weg. Die jeweiligen Buchstaben davor sind dann einfach Null.

- **Verschieben, Strecken, Spiegeln**

Ganz kurz: Ersetzt man in einer Gleichung jedes x durch (x+2), dann verschiebt sich das Schaubild um zwei nach links. Ersetzt man x durch (x-4), dann verschiebt sich das Schaubild um 4 nach rechts. Addiert man zum kompletten Term die Konstante 10, so verschiebt sich das Schaubild um 10 nach oben. Durch Kombination kann man beliebig verschieben. Setzt man vor den kompletten Funktionsterm ein Minuszeichen, klappt das Schaubild um (Spiegelung an der x-Achse).

Es ist ganz praktisch, wenn man sich damit auskennt, wie man Schaubilder verschiebt. Es ist ganz einfach:

Beispiel
$f(x) = x^2$ kennt jeder. Das ist die nach oben geöffnete Normalparabel. Setzt man vor den gesamten Term ein –, dann ist sie nach unten geöffnet. Wem das nicht klar ist, soll es mit dem GTR ausprobieren. Also $f(x) = -x^2$ ist nach unten geöffnet. $f(x) = -x^2+4$ ist

nach unten geöffnet und um 4 nach oben verschoben. Ersetzt man +4 durch +9, ist die Parabel um 9 nach oben verschoben. Ersetzt man x durch x–2, dann erhält man mittlerweile $f(x) = (x-2)^2+9$ und diese Kurve ist um 2 nach rechts verschoben. Man nennt so ein ersetzen von x eine Substitution, wie man es vom $x^2=u$ her vielleicht schon kennt. Dieses Grundprinzip funktioniert bei schwierigen Termen genauso. Untersuchen wir $f(x) = 2\sin(x)(x^2+x^3-10)+8$. Schreibt man $g(x) = 2\sin(x+1)((x+1)^2(x+1)^3 -10)+8$ und lässt beide Kurven mit dem GTR zeichnen, dann stellt man fest, dass sie zueinander um 1 verschoben sind. Wobei g „vorneweglåuft". Die Werte von g kommen immer 1 früher, daher ist diese Kurve nach links verschoben.

- **<u>Aufstellen eines Differenzenquotienten, Übergang zum Differentialquotienten</u>**

Ganz kurz: Wird nie an schwierigen Beispielen gefragt, aber prinzipiell sollte man es können. Der Differenzenquotient wird immer zwischen zwei Punkten P(a|b) und Q(c|d) aufgestellt, wobei P und Q auf dem Schaubild einer Funktion f liegen. Man bildet dann

$$m = \frac{d-b}{c-a},$$

was einfach die Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte ist. Auf die Reihenfolge achten! Nicht d-b oben und a-c unten, sondern c-a. Es muss „zusammenpassen".

Q soll jetzt „verschiebbar" sein. Wenn Q sich an P annähert, nähert sich c gegen a und d gegen b. Daher schreibt man c dann oft als a plus etwas kleines, ein h. Und da d=f(c)=f(a+h) ist und b=f(a):

$$m = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geht jetzt das h gegen Null, dann wird aus m die Ableitung, also die Steigung direkt im Punkt P(a|b)!

f ist immer vorgegeben und man ersetzt dann f(a+h) und f(a) durch konkrete Ausdrücke und schaut, was passiert.

Beispiel
P(1|3) auf f mit $f(x)=x^2+2$. Dann ist wie gesehen f(1)=3. Bilde noch f(1+h): $f(1+h)=(1+h)^2+2=1^2+2h+h^2+2$. Hier wurde mit binomischer Formel vereinfacht. Dann setzen wir in die „m-Formel" ein und erhalten:

$$m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(1^2+2h+h^2+2)-1^2+2}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Was bedeutet das?! m ist 2+h. h symbolisiert den „Unterschied" zwischen P und Q und wird immer kleiner. Dann wird h irgendwann winzig im Vergleich zur 2. Insgesamt ist also f`(x) = 2x (sozusagen für h=0, was es eigentlich aber nie ganz erreicht).

Beispiel
Nun für einen belieigen Punkt P(x|f(x)) auf f mit $f(x)=x^2+2$. Wir bilden auch hier f(x+h): $f(x+h)=(x+h)^2+2=x^2+2xh+h^2+2$. Hier wurde x durch x+h ersetzt (wie beim anderen Thema, dem Verschieben) und dann mit binomischer Formel vereinfacht. Dann setzen wir ein und erhalten:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 2) - x^2 + 2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Was bedeutet das in diesem Fall? m ist 2x+h. h symbolisiert den „Unterschied“ zwischen P und Q und wird immer kleiner. Dann wird h irgendwann winzig im Vergleich zu 2x. Insgesamt ist also f`(x) = 2x.

- **Ableitungsregeln**

Ganz kurz: Diese drei Regeln solltest du bisher kennen (die Namen sind so, sie sind aber überhaupt nicht wichtig!):

Potenzregel:	*x^3 wird zu $3x^2$. Und zwar wandert die Hochzahl als Faktor vor das x und wird oben um 1 kleiner gemacht. Allgemein: x^t wird zu tx^{t-1}.*
Faktorregel:	*Konstanten vor x bleiben erhalten: $5x^2$ wird zu 5 mal 2x.*
Summenregel:	*Hast du einen langen Term wie x^3-5x^2+8, kannst du summandenweise ableiten. Das meint, erst x^3 zu $3x^2$ machen, $-5x^2$ zu -10x und 8 zur 0 machen und dann zum Ergebnis zusammensetzen: $3x^2-10x$.*

Bei x mit negativen Hochzahlen oder bei Wurzeln aufpassen! Das geht alles mit der Potenzregel, man muss aber wissen, wie man $\sqrt{x}$ oder $\frac{1}{x^3}$ umschreiben kann!

Mit dem GTR:	*Will man einen einzelnen Wert wie die Ableitung von $f(x)=x^2$ an der Stelle 2, kann man einfach <nDeriv(X²,X,2)> eingeben und entern. Diesen Befehl findet man mit <MATH> und <8>. Dabei muss in der Mitte das X hin, damit der GTR weiß, dass man nach X ableiten will. Möchte man mehrfach ableiten, dann schachtelt man den Befehl, also nDeriv(nDeriv())…*

Eine komplette Ableitung kann der GTR nicht, nur im <Y> als Schaubild. Dazu in Y1 wieder <nDeriv> aufrufen und für beispielsweise x^3 dies eingeben: „Y1=nDeriv(X³,X,X)".

Beispiel
$f(x)=x^2$. $f`(x)=2x$. $g(x)=2x^2$ und $g`(x)=2(2x)=4x$. Für g mussten Potenz- und Faktorregel angewendet werden.

Beispiel
$f(x)=x^{1000}$. $f`(x)=1000x^{999}$.

Beispiel
$f(x)=1/x$. Hier muss man umschreiben: $f(x)=x^{-1}$. Dann ist $f`(x)=-1x^{-2}$.

Beispiel
$f(x) = \sqrt{x} + 5$. Hier muss man zuerst einmal die Summenregel anwenden. 5 fällt also einfach weg, aber was ist mit der Wurzel? Die schreibt man als Hochzahl um und wendet dann die Potenzregel an: $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Dann findet man $f'(x) = 1/2 \cdot x^{-1/2}$. Das kann man sogar noch einmal umschreiben (siehe vorheriges Beispiel mit negativen Hochzahlen):

$$f'(x) = 1/2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- **<u>Aufstellen von Tangente und Normale</u>**

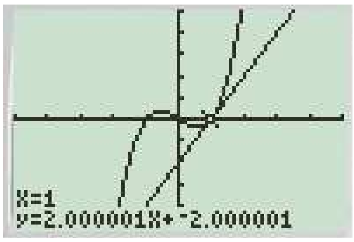
Ganz kurz: Die Tangente an einem Punkt P(x1|y1) einer Funktion f hat die Steigung m=f '(x). Die Normale hat den negativen Kehrwert dieser Steigung. Es gibt zwei einfache Formeln für diese Geraden:

$t\colon\ y = f'(x1)(x - x1) + y1$ *bzw.* $n\colon\ y = -\frac{1}{f'(x1)}(x - x1) + y1$

Tangentengleichung *Normalengleichung*

Mit dem GTR: Hat man das Schaubild der Funktion (f(x) in Y1 eintragen), so kann man mit <DRAW> (über <2nd> und <PRGM>) mit <5> die Tangente zeichnen lassen. Die Tangentengleichung wird dann unten angegeben. Der GTR fragt dich, an welcher Stelle du die Tangente haben möchtest. Variante1: Hinwandern mit dem Kreuz, Variante2: Gib die Zahl direkt nach dem Tangentenbefehl ein, bspw. 2 und drücke <ENTER>. Die Normale musst du leider selbst eingeben.

Also geben wir uns $f(x)=x^3-x$ vor. Wir wollen am Punkt P(1|0) die Tangente bestimmen. Die Formel steht oben. x1=1, y1=0 und wir brauchen noch f\`(1). $f`(x)=3x^2-1$ und so ist f\`(1)=2. Also gilt t: y=2(x-1)+0. Oder etwas einfacher y=2x-2. Mit dem GTR gebe ich in <Y1> den Ausdruck X^3-X ein, gehe auf <WINDOW>, dann auf <DRAW>, <5> und drücke 1 und <ENTER>. Dann ergibt sich dieses Bild:



Und unten steht: Tangente für x=1 ist y=2.000001x+(-2.000001). Meint natürlich dasselbe wie wir, allerdings ist der GTR nicht so schlau wie wir und rundet daher und gibt nicht „-2“, sondern „+(-2)“ aus, was umständlicher ist.

Die Normale gibt es wie gesagt nur „händisch“, aber wir haben ja alle Größen. Der negative Kehrwert von 2 ist halt -0.5 und so ist n: y=-0.5(x-1)+0 oder y=-0.5x + 0.5 (minus mal minus!).

- **<u>Bestimmen von Nullstellen</u>**

Ganz kurz: ***Das Bestimmen von Nullstellen ist die wichtigstes Grundtechnik!!!***
Mit dem GTR ist das ganz einfach: man kann die Kurve mit der x-Achse schneiden, mit <TRACE> absuchen oder mit <CALC> und <ZERO> finden. Voraussetzung ist, dass man die Gleichung in <Y1> eingibt.
Per Hand hat man es oft schwieriger. Hier muss man Umformen können, Ausklammern beherrschen, die abc- oder pq-Formel wissen und Substituieren können.
Gehe immer in dieser Reihenfolge vor: Kann ich durch einfach Umformen zur Lösung kommen? Lassen sich ein oder mehrere x ausklammern? Kann ich die abc-Formel anwenden? Oder muss ich vorher substitutieren? Notfallplan: Raten, kann aber als Abschreiben ausgelegt werden.
Zum Ausklammern ein Tipp: Wenn ihr x ausgeklammert habt, gibt es die Regel, dass ein Produkt nur Null wird, wenn einer der Faktoren Null ist. Nutzt das aus!

Beispiel

$x^5 - x^3 = 0$. Umformen bringt uns nicht wirklich weiter: $x^5 = x^3$. Man könnte schon raten, aber vorher prüfen wir den nächsten Punkt, das Ausklammern: x^3 besteht aus xxx und x^5 aus xxxxx. Damit haben sie xxx gemeinsam und man findet $x^5 - x^3 = xxx(xx-1)$. Das stimmt mit der 1, denn nur so kommt wieder xxxxx-xxx heraus, wenn man die Klammer auflöst. Schöner geschrieben ist das natürlich $x^3(x^2-1)$. Nun sollen wir ja $x^3(x^2-1) = 0$ lösen. Links steht ein Produkt von 2 Zahlen. Das wird nur Null, wenn entweder x^3 Null ist oder x^2-1 (oder natürlich beide zusammen, passiert aber sehr selten). Also entweder muss $x^3=0$ sein oder $x^2-1=0$. Und jetzt finden wir alle Lösungen: $x^3=0$ liefert nur x1=0 und $x^2-1=0$ formen wir um zu $x^2=1$ und dann mit Wurzeln: x2=+1 und x3=-1.

Beispiel

$x^2-2x+1=0$. Hier kann nicht gut umformen und so wenden wir die abc-Formel an. a=1, b=-2 (aufpassen mit Vorzeichen!!!) und c=1. Es gilt

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

und mit den oben genannten Zahlen wir das zu:

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Hier liegt der seltenere Fall vor, dass x1=x2=1 ist (weil plusminus 0 ist halt plus 0). Man nennt dann x1=1 **doppelte Nullstelle**. *Fallen noch mehr Lösungen auf eine Zahl zusammen, kann sie auch einmal dreifache, vierfache usw. Nullstelle sein, was selten ist.*

Beispiel

$x^3-2x^2+x=0$. Hier kommt man nicht mit Umformen weiter. Ausklammern hilft aber:
$x(x^2-2x+1)=0$. Und nun muss x1=0 sein und die übrigen Nullstellen finden sich in der Klammer (x^2-2x+1). Praktischerweise ist das das gerade gerechnete Beispiel und so ist x2=x3=1.

Beispiel

$x^4-2x^2+1=0$. Weder Ausklammern noch abc-Formel helfen. Aber mit der Substitution $u=x^2$ schreibt sich die Gleichung einfacher: $u^2-2u+1=0$. In u-Sprache können wir jetzt mit der abc-Formel die Gleichung lösen und finden wieder u1=u2=1. Was heißt das aber für unser x?! Das ist nicht so schwer, denn es gilt ja $x^2=u$. Ist nun u1=1 passen dazu die x-Werte x1=1 und x2=-1, denn beide ergeben quadriert ja die 1. Also sind das unsere zwei Lösungen.

- **Bestimmen von Extremstellen und Extrempunkten**

Ganz kurz: Eine Extremstelle x1 liegt vor, wenn f\`(x1)=0 ist und die Ableitungsfunktion einen Vorzeichenwechsel macht. Wir prüfen das entweder mit f‘‘(x1) oder mit dem „Wackeln" um x1. Ist f‘‘(x)>0 haben wir einen Tiefpunkt, bei f‘‘(x)<0 einen Hochpunkt. Bei f‘‘(x)=0 wissen wir es nicht. Beim Wackeln liegt bei einem Vorzeichenwechsel von + nach – ein Hochpunkt vor, umgekehrt ein Tiefpunkt. ***Auch hier muss man erst einmal Nullstellen (zwar von der Ableitung) suchen und das sollte man beherrschen!*** *Der GTR kann ganz einfach über <CALC> (<2nd> und <TRACE>) mit <MAX> bzw. <MIN> die Extremwerte finden.*

Beispiel
$f(x)=x^3-x$. Wir brauchen erst einmal $f'(x)=3x^2-1$. Jetzt setzen wir $f'(x)=0$ und finden zwei Lösungen, x1=Wurzel(1/3) und x2=-Wurzel(1/3). Jetzt bilden wir $f''(x)=6x$ und finden $f''(x1)>0$ und $f''(x2)<0$. Damit ist bei x1 ein Tiefpunkt und bei x2 ein Hochpunkt. Mit dem GTR findet man dieses Maximum (Minimum selbst suchen!): x1=0.58 mit y1=-0.38.

Beispiel
$f(x)=x^4-x^2$. Wir bestimmen gleich mal $f'(x)=4x^3-2x$ und $f''(x)=12x^2-2$. Nun finden wir die Nullstellen der Ableitung und lösen daher $4x^3-2x=0$. Das geht ganz gut, weil wir ein x ausklammern können: $x(4x^2-2)=0$. Und so ist x1=0 und $4x^2-2=0$ liefert die übrigen Lösungen. $4x^2=2$ oder $x^2=0.5$ oder x2/3= plusminus Wurzel(0.5). Bei beiden Lösungen x2,x3 ist $f''(x)>0$ und so sind es Tiefpunkte, bei x1=0 gilt $f''(x)<0$ und es ist ein Hochpunkt. Schaubild mit dem GTR ist ein W und es passt.

Beispiel
$f(x)=x^3$. Wieder $f'(x)=3x^2$ und $f''(x)=6x$. Nullstellen von f'(x) gibt es so: $3x^2=0$, also x1/2=0. Nur 0 ist ein Kandidat. Aber $f''(0)=0$ und so wissen wir nicht, was los ist. Daher wackeln wir einmal etwas um die 0. $f'(0.1)=0.03$ und $f'(-0.1)=0.03$. Also ist links von der 0 die Steigung negativ und rechts von der Null auch (das Quadrat frisst das Vorzeichen auf). Also kein Vorzeichenwechel und so kein Extremwert. Man nennt diese Sorte Punkt auch **Sattelpunkt**.

- ***Bestimmen von Wendepunkten (Zusatz wegen G9)***

Ganz kurz: Wendepunkte sind Extrempunkte der Ableitung. Kannst du Extrempunkte bestimmen, kannst du auch Wendepunkte bestimmen. Einfach einmal ableiten und nochmal ableiten. Dann $f''(x) = 0$ lösen und auf Vorzeichenwechsel testen!

Beispiel
Wir starten mit $f(x)=x^4/12-x^2/2$. Wir suchen Wendepunkte. Dazu müssen wir erst einmal ableiten: $f'(x)=x^3/3-x$. Nun tun wir so, als wäre f' die Startfunktion und wir suchen Extremwerte. Daher müssen wir wieder ableiten und Kandidaten suchen ($f''(x)=0$!). $f''(x)=x^2-1$. Es finden sich zwei Lösungen, nämlich x1=+1 und x2=-1. Liegt aber auch ein VZW vor? Wir wackeln um +1 und sehen $f''(+0.9)=0.81-1<0$ bzw. $f''(+1.1)=1.21-1>0$. Hier ist also ein Wendepunkt. Gleiches findet sich dann auch für -1. **Wichtig ist hier, in der zweiten Ableitung zu wackeln!** Für Extremstellen wackelt man mit f', für Wendestellen mit f''!

- **Finden von Symmetrien**

Ganz kurz:

y-Achsensymmetrie…	*wenn nur gerade Exponenten von x vorhanden sind.*
Punktsymmetrie zum Ursprung…	*wenn nur ungerade Exponenten von x vorhanden sind.*

Beispiel
$f(x)=x-5$ ist nicht symmetrisch. $f(x)=x^2-5$ schon.

Beispiel
$f(x)=\sin(x^2+5)(x^2-7)+8$ ist symmetrisch! Auch $f(x)=\frac{x\cdot\sin(x)}{\sqrt{x^3}-x}$ wäre punktsymmetrisch. So eine komplizierte Funktion kommt aber in der Schule eigentlich nie vor!

Beispiel
$f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ ist nicht symmetrisch, da alle möglichen Exponenten auftauchen!

- **Verhalten für betragsmäßig große x-Werte**

Ganz kurz: Man muss immer zwei Fälle abarbeiten; einmal geht x gegen plus Unendlich und einmal gegen minus Unendlich. Das meint, dass die x-Werte einmal sehr groß sind und das andere mal auch sehr groß, aber mit einem Minuszeichen davor. Man schaut dann einfach, „was Sache ist“. Tipps hierzu wären:

1) sin(x) und cos(x) bleiben immer zwischen y=-1 und y=1 eingesperrt.
2) 1/x usw. gehen immer gegen Null für große x-Werte. Für große negative Zahlen ist das auch so.
3) Die ganzrationalen Funktionen werden immer vom Summanden mit dem höchsten Exponenten „dominiert“. Man muss nur ihn betrachten!
4) Wurzeln gehen auch gegen Unendlich, aber viel langsamer als x, x² usw.

Der GTR kann das auch, allerdings schauen wir uns das näher in der Kursstufe an. Schon jetzt kannst du aber über <WINDOW> dir die Bereiche „weit draußen“ ansehen.

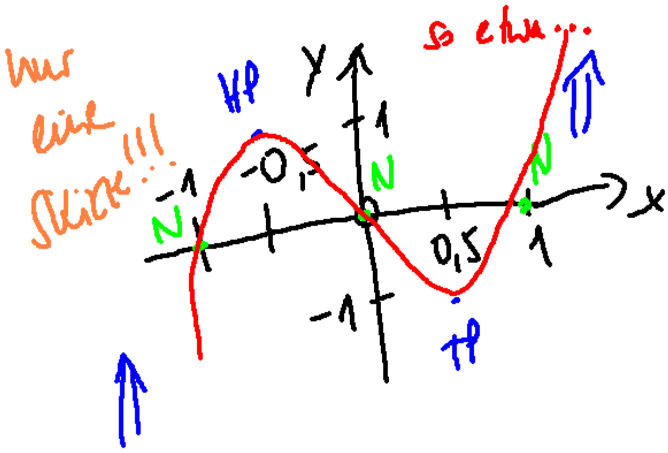
Beispiel
$f(x)=x^3+1/x$ verhält sich wie x^3, weil 1/x gegen 0 geht für große Zahlen. Da x^3 für große positive Zahlen positiv ist und für große negative Zahlen negativ, sind die Grenzwerte einmal +Unendlich und einmal –Unendlich.

Beispiel
$f(x)=x^2-1000/x$ verhält sich wie x^2 und das geht in beiden Fällen gegen +Unendlich (das Quadrat frisst auch hier das Vorzeichen).

- **Zeichnen von Schaubildern anhand der besonderen Punkte**

Ganz kurz: Mit dem GTR muss man sich natürlich nicht solche Umstände machen. Per Hand ist das aber gar nicht so doof.

Beispiel
Nehmen wir an, wir wissen, dass die Funktion aus dem –Unendlichen kommt, bei x=-1 eine Nullstelle hat, bei P(-0.5|1) einen Hochpunkt hat, dann bei 0 wieder eine Nullstelle und bei Q(+0.5|-1) einen Tiefpunkt und für große x-Werte nach oben abhaut. Dann trägt man diese Infos ein und verbindet „frei Hand“, etwa so:

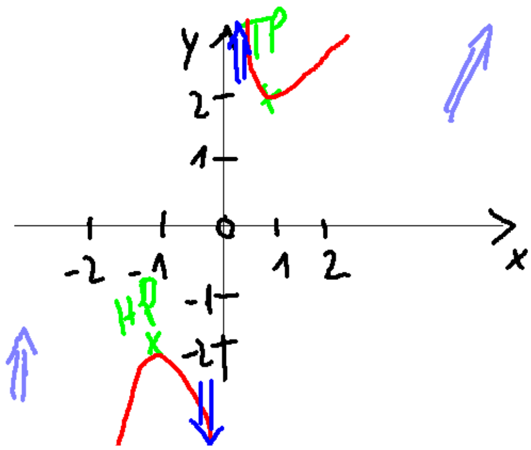


- **<u>Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion</u>**

Ganz kurz: Man klappert nacheinander die obigen Techniken ab. Details siehe im 1. Teil. Hier gleich ein Beispiel. Mit dem GTR braucht man so etwas nicht wirklich.

Beispiel
Eine Aufgabe: Es sei die Funktion $f(x)=x+1/x$ gegeben. Bestimme den maximalen Defintionsbereich, suche Symmetrien, finde die Nullstellen, die Extremstellen und untersuche das Verhalten für $|x|$ gegen Unendlich. Skizziere die Kurve anschließend.

1) **Definitionsbereich**. Probleme kann es beim Teilen durch Null und beim Wurzeln aus negativen Zahlen geben. Hier gibt's keine Wurzeln, aber einen Bruch mit x. Also schaue ich mir $1/x$ an und sehe $x=0$ ist verboten. Um gleich zu wissen, was die Funktion in der Nähe der Null macht, wackeln wir etwas um die Null. Für winzige Zahlen wie 0.001 „explodiert" der Bruch und die Funktion geht gegen +Unendlich. Für negative kleine Zahlen genauso, nur dass hier das Vorzeichen vornedran bleibt.
2) **Symmetrien**. Da nur ungerade Exponenten auftreten, muss $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung sein. Kleiner Test: $x=2$ folgt $f(2)=2{,}5$. $x=-2$ folgt $f(-2)=-2{,}5$. Passt.
3) **Nullstellen**. $f(x)=0$, also $x+1/x=0$. Hier muss man nach x auflösen. Also mal x (aufpassen, dass x nicht Null ist, aber das ist dem Defintionsbereich sein Dank nie so!) und wir finden $x^2+1=0$. $x^2=-1$ wird nix, also gibt es keine Nullstellen.
4) **Extremstellen**. Wir bilden $f'(x)=1-1/x^2$ (weil wir $1/x$ als x^{-1} schreiben). Jetzt suchen wir Nullstellen: $0=1-1/x^2$ oder $1/x^2=1$. Mal x^2 (wieder nicht gleich Null, s.o.) und wir finden schließlich $1=x^2$ oder $x1=+1$ bzw. $x2=-1$. Also sind das unsere Kandidaten. $f''(x)=2/x^3$. Und so ist $f''(1)>0$ und $f''(-1)<0$. Wir haben bei $x1=1$ einen Tiefpunkt und bei $x2=-1$ einen Hochpunkt. Die Punkte findet man, wenn man x1 bzw. x2 in $f(x)$ einsetzt: $f(1)=2$, $f(-1)=-2$ und so TP(1|2) und HP(-1|-2).
5) Für x gegen +Unendlich gewinnt x und „haut gegen +Unendlich ab", genauso für x gegen –Unendlich, nur geht's hier Richtung –Unendlich.
6) **Skizze**.

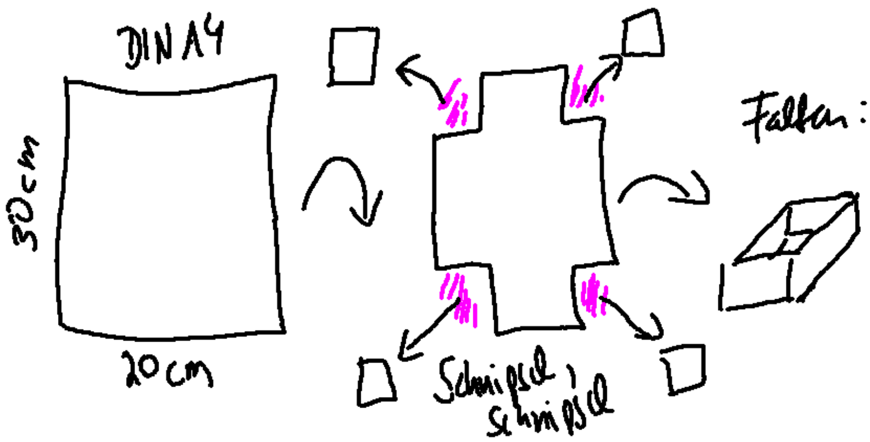


Die Skizze ist hier gar nicht so einfach, notfalls sucht man weitere Punkte. Überprüfe mit dem GTR. Um die Null und weit draußen haben wir unsere Pfeile und wissen, wo es hingeht. Von links nach rechts: wir kommen von unten und durchlaufen einen Hochpunkt, rechts von ihm muss es wieder in den Keller und das stimmt auch mit dem Pfeil überein. Fertig. Rechte Seite: Wir kommen von oben, müssen durch den Tiefpunkt und danach wieder hoch. Dann geht's einfach weiter nach oben, das schreibt uns der letzte blaue Pfeil vor.

- **<u>Anwenden auf Extremalaufgaben</u>**

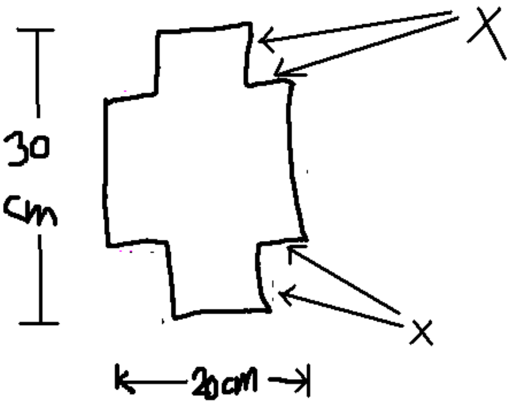
Ganz kurz: Bei Extremalaufgaben muss man oft eine (nicht sofort gegebene) Funktion maximieren oder minimieren (Standardbeispiel: Kosten minimieren, Gewinn maximieren aus der Wirtschaft). Da wir Hoch- und Tiefpunkte bestimmen können (am besten per GTR), muss man nur die Zielfunktion finden.

Beispiel
Du bekommst ein Blatt DINA4-Papier und sollst daraus eine Schachtel bauen mit möglichst großem Volumen. Dabei schneidest du an den Rändern Quadrate weg, etwas so:

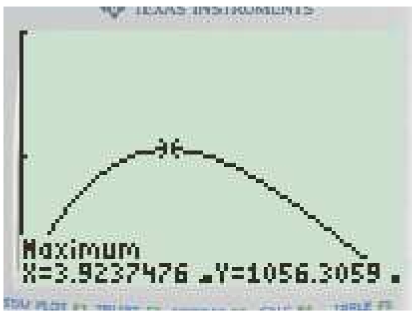


Die Quadrate sollen alle gleich groß sein! Nun die Frage: Wie groß sind sie am besten? Klar ist, schneidet man zu wenig weg, wird die Box sehr flach und das ist sicher nicht gut fürs Volumen. Schneidet man zuviel weg, wird sie zwar hoch, aber dafür schmal, was auch nicht gut ist. Irgendwo dazwischen wird die optimale Größe liegen…

Zuerst einmal müssen wir die Größe der rausgeschnittenen Quadrate kennen. Da wir gar nichts darüber wissen, schneiden wir eben x cm weg. dann ist ein Quadrat x^2 cm^2 groß und da wir vier davon haben, ist der Wegschnitt $4x^2$. Das Restpapier hat dann diese Form:



Das Volumen der Schachtel am Ende ist Höhe mal Breite mal Tiefe. Dabei ist die Höhe bei uns einfach x cm. Die Breite war mal 20 cm, aber nun haben wir 2x cm weggeschnitten (auf jeder Seite einmal x) und so verbleiben (20-2x) cm. Die Tiefe war vor dem Schneiden 30 cm, aber auch hier sind 2x cm weggefallen. So findet sich das Volumen in Abhängigkeit von x als $V(x) = x(20-2x)(30-2x)$. Diese Zielfunktion, die „Volumenfunktion" gilt es jetzt zu maximieren. Für welches x zwischen 0 (nix wegschneiden) und 10 cm (die ganze Breite wegschnipseln) ist V(x) maximal? Der GTR hilft und findet über <MAX> ungefähr 4 cm:



Bei solchen Anwendungsaufgaben kann mit dem GTR eigentlich nur schiefgehen, dass man das <WINDOW> falsch einstellt und so die Funktion nicht richtig sieht. Dazu kann helfen, dass hier nur $0<x<10$ Sinn macht (wegen dem Schnipseln). Den y-Wert kann man mit 100, 1000, 10000 schnell durchtesten und findet dann ganz gut, dass es um die 1000 spannend wird. Daher habe ich einen Bereich bis 2000 gewählt.

Übersicht der Begriffe und Techniken

Begriff	Wissenswertes	GTR
Funktion	jedem x-Wert ist genau ein y-Wert zugeordnet.	---
Definitionsmenge	Menge der zugelassenen x-Werte.	---
Wertemenge	alle y-Werte, auf denen x-Werte wegen $f(x)$ landen.	---
Funktionsterm	$f(x)=\ldots$	**<Y1=>**
Schaubild	Bild der Funktion.	**<GRAPH>**
Wertetabelle	x-Werte neben y-Werten aufgetragen.	**<TABLE>**
Ganzrationale Funktionen	nur Konstanten und natürliche Potenzen von x.	---
Wurzelfunktionen	ACHTUNG: keine negativen Zahlen unter Wurzeln!	---
Trigonometrische Funktionen	sin/cos (tan), Einheitskreis, Bogenmaß	---
Exponentialfunktionen	2^x usw., haben keine Nullstellen, wachsen schnell	---
Hyperbelfunktionen	$1/x$, $1/x^2$. ACHTUNG: nicht durch Null teilen!	---
Differenzenquotient	Bruch. Zähler: y2-y1, Nenner: x2-x1. Steigung m.	---
Differentialquotient	Wie Differenzenquotient, aber x2 geht gegen x1.	---
1. Ableitungsfunktion	Die Ableitung. Jedem x wird seine Steigung $f'(x)$ zugewiesen.	**<nDeriv(X^2,X,1>, <nDeriv(Y1,X,X)>**
2. Ableitungsfunktion	Ableitung der Ableitung. Praktisch zum VZW-Test bei HP/TP.	**<nDeriv(nDeriv)>**
Tangente	Gerade durch P(x|y) mit Steigung $f'(x)$	**<DRAW>:<tangent>**
Normale	Gerade senkrecht zur Tangenten durch P(x|y).	---
Nullstellen	$f(x)=0$ bzw. $y=0$.	**<CALC>:<zero>**
y-Achsensymmetrie	nur gerade Potenzen von x in $f(x)$.	**<WINDOW> !?**
Punktsymmetrie zum Ursprung	nur ungerade Potenzen von x in $f(x)$.	**<WINDOW> !?**
Extrempunkte	Hochpunkte und Tiefpunkte.	---
Hochpunkt	$f'(x)=0$ und Vorzeichenwechsel + nach –	**<CALC>:<max>**
Tiefpunkt	$f'(x)=0$ und Vorzeichenwechsel – nach +	**<CALC>:<min>**
Sattelpunkt	$f'(x)=0$ und kein Vorzeichenwechsel	---
Wendepunkt	Extrempunkt der Ableitung: $f''(x)=0$ mit VZW (egal wie)	---
Verhalten |x| gegen Unendlich	2 Fälle: gg. +Unendl. und gg. –Unendlich!	**<WINDOW>**
Bestimmen d. Def.bereiches	Teile ich durch 0? Wurzele ich aus neg. Zahlen?	---
Bestimmen des Wertebereiches	Wo landen die x-Werte? Teste große, kleine Zahlen	---
Aufstellen von Fkt.gleichungen	Gleichungen aufstellen, durchnummerieren, nach und nach auflösen, ineinander einsetzen.	**<MATRIX>: <rref(>**
Verschieben d. Schaubild von f		
…in x-Richtung	Ersetze jedes x in $f(x)$ bspw. durch $(x-2)$ für Verschieben um 2 nach rechts.	
…in y-Richtung	Addiere zum gesamtem $f(x)$ eine Konstante.	---
Spiegeln des Schaubildes von f	Ersetze $f(x)$ durch $-f(x)$.	---
Stauchen des Schaubildes von f	Ersetze x bspw. durch 2x, um das Schaubild zu stauchen	---
Strecken des Schaubildes von f	Ersetze x bspw. durch 0,5x, um das Schaubild zu stauchen	---
Differentialquotienten rechnen	Schreibe x2 und y2 als $x+h$ bzw. $f(x+h)$, setze alles ein und vereinfache. Kürze h so gut es geht und setze dann $h=0$.	
Potenzregel	$f(x)=x^3$. 3 nach vorne und oben 1 kleiner: $f'(x)=3x^2$.	---
Faktorregel	$f(x)=2x^2$. 2 vorne mitnehmen: $f'(x)=2(2x)=4x$.	---
Summenregel	$f(x)=x^3+x^2$. Getrennt betrachten: $f'(x)=3x^2+2x$.	---

Aufstellen Tangente	f(x) ist gegeben, x1 ist gegeben. f(x1) und f‘(x1) bestimmen und in t: y=f‘(x1)(x-x1)+f(x1) einsetzen und vereinfachen.
Aufstellen Normale	Identische Formel wie oben, nur die Zahl f‘(x1) durch ihren negativen Kehrwert ersetzen. Bspw. wird aus 2 einfach -1/2.
Bestimmen von Nullstellen	Umformen, Ausklammern, abc-Formel, Substitution. ACHTUNG: beim Umformen nicht durch Null teilen! Hat man erst einmal ein Produkt dastehen, kann man die Nullstellen der Einzelfaktoren suchen. Zusammen sind es alle Nullstellen.
Schnelles Bestimmen HP/TP	Vorzeichenwechsel mit f‘‘(x)>0 (TP) bzw. <0 (HP) abtesten. Bei f‘‘(x)=0 muss man dann doch „wackeln“.
Skizzieren eines Schaubilds	„|x| gegen…“-Pfeile eintragen. Falls Werte für x verboten sind, auch hier die Pfeile eintragen (siehe Beispiel oben). Nullstellen, HP/TP eintragen. Zusammenbauen.