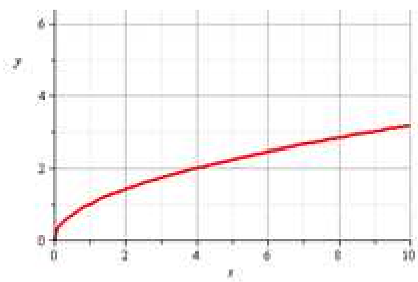
EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* Stunde vom 18.03.2011	**GFS und Probearbeit**

In dieser Doppelstunde gab es eine GFS zu Rotationskörpern und wir haben die Probearbeit besprochen.

Berechnen von Rotationskörpern
Wir haben das Integrieren (Aufleiten) zum Berechnen von Flächeninhalten nutzen können. Die Idee war hier, einfach kleine Bälkchen unter die Kurve zu legen und diese immer feiner zu machen. So wird aus der Summe kleinster Balken das Integral.

Geht das auch bei Volumen (eine Dimension mehr als Flächen)?!
Ja, das geht! Allerdings nur für einen speziellen Fall sehr einfach und nur den behandeln wir in der Schule. Eigentlich geht es generell! Der Sonderfall sind die sogenannten Rotationskörper. Starten wir wieder mit einer einfachen Kurve, bspw. mit der Wurzelfunktion f(x)=wurzel(x):

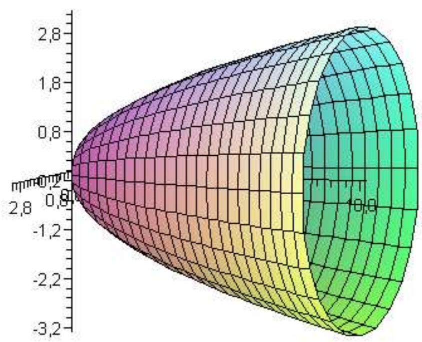


Die Fläche unter der Kurve errechnet sich zu

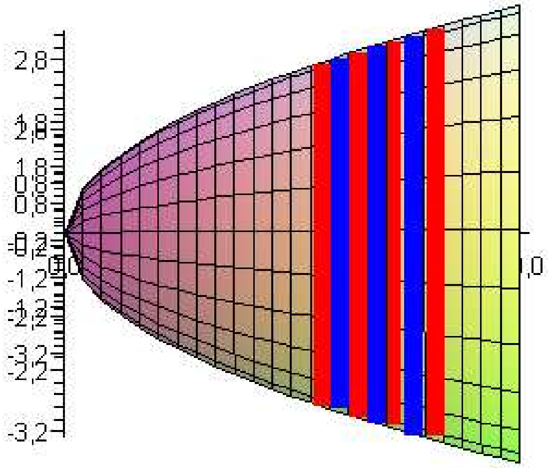
$$\int_0^{10} \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot 10^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}}\right] \approx 21$$

Dabei wurde benutzt, dass zu f(x) = wurzel(x) = $x^{1/2}$ die Funktion F(x) = 2/3·$x^{3/2}$ eine Stammfunktion ist.

Soweit so gut. Jetzt lassen wir die Wurzelfunktion gedanklich um die x-Achse rotieren; siehe nächste Seite!



Es ergibt sich eine Art Becher, ein Sektglas. Wie groß ist dessen Rauminhalt? Genauso wie im Zweidimensionalen gehen wir wieder scheibchenweise vor. Und das Wort trifft es sehr gut; wir stellen uns das Sektglas durch winzige Scheibchen aufgebaut vor, etwa so:



Wie groß sind einzelne (roten, blauen) Scheibchen?! Schauen wir von rechts drauf, sind es Kreisflächen. Sie haben einen Radius von f(x) und damit eine Fläche von $\pi \cdot f(x)^2$ (weil Kreisflächen nunmal $\pi \cdot r^2$ groß sind bei festem Radius r). Aber diese Fläche ist nicht das, was wir eigentlich wollen, wir wollen das Volumen. Das ist aber einfach Grundseite mal Höhe und die Höhe ist von vorne gesehen die Breite in x-Richtung!

Jetzt addieren wir also viele viele Scheibchen und die sind ganz ganz dünn. Wieder bekommt man aus einer Summe ein Integral und zwar dieses (die Grenzen sollen wieder von 0 bis 10 gehen):

$$\int_0^{10} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx$$

Fläche des Scheibchens, wird über Pi mal r² gebildet, wobei r einfach der Funktionswert ist.

Breite, aber "unendlich dünn"

Dieses Integral können wir so wie immer ausrechnen. Einfach f(x)=wurzel(x) einsetzen. Dann hat man praktischerweise die Wurzel zu quadrieren und sie fällt einfach weg:

$$\int_0^{10} \pi \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^{10} \pi x \, dx = [\pi \cdot 10^2/2] - [\pi \cdot 0^2/2] = \pi \cdot 50 \approx 157$$

Hier wurde verwendet, dass $x^2/2$ eine Stammfunktion von x ist. Die Zahl 157 ist nun eine Volumenzahl. Stellt euch vor, dass die Einheiten im Schaubild 1cm groß sind, dann haben wir als Fläche cm² und als Volumen hier ein cm³. Kubikzentimeter sind aber gerade Milliliter, kurz ml. Also fasst ein 10cm hohes Sektglas, das mit der Wurzelfunktion beschrieben werden kann, gerade 157ml.