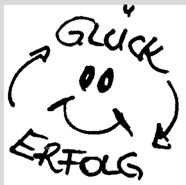
EI M5 2010-11	MATHEMATIK # 4. Probeklausur - Pflichtteil	

In diesem Teil sind weder GTR noch die Formelsammlung erlaubt. Um den Wahlteil zu erhalten, gib bitte diesen Pflichtteil bearbeitet ab.

1. Aufgabe **(2 Punkte)**

Bilde die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=x\cdot\sin(2x)$ für reelle Zahlen x.

Hier ist ein Produkt zweier Funktionen gegeben; u=x und v=sin(2x). Also müssen wir u'v+v'u als f' bilden. für v' müssen wir die Kettenregel anwenden und erhalten so cos(2x)*2 bzw. 2cos(2x). Insgesamt erhalten wir für die Ableitung f'(x) = 1*sin(2x) + x*2cos(2x) = sin(2x) + 2xcos(2x).

2. Aufgabe **(3 Punkte)**

Berechne die folgenden Integrale exakt (dabei ist x reell):

$a)\ \int_0^2 (2x-1)^3\,dx$ $\qquad b)\ \int_2^6 \frac{x+x^2}{x^2}\,dx$ $\qquad c)\ \int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$

Zu a): $(2x-1)^4$ ist schon einmal ein guter Tipp für F. Allerdings wird beim Ableiten die 4 nach vorne kommen und eine 2 hüpft als innere Ableitung aus der Klammer… Also korrigieren wir mit 1/4 und 1/2 bzw. kurz mit 1/8 und finden $F(x)=1/8*(2x-1)^4$ für $f(x)=(2x-1)^3$. Nun setzt man 2 ein und 0 ein, bildet die Differenz und ist damit fertig: $1/8*(2*2-1)^4$ = 1/8*81 und für 0 erhält man 1/8. Insgesamt also 81/8-1/8=80/8=10.

Zu b): Hier muss man $x+x^2$ oben auftrennen!!! Dann hat man $x/x^2+x^2/x^2 = 1/x+1$. Dann suchen wir also für f(x)=1/x+1 eine Stammfunktion und finden ln(x)+x. Dann kann man 6 und 2 einsetzen, bildet die Differenz und erhält ln(6)+6 – (ln(2)+2) = ln(6) – ln(2) +4. Premium: ln(6) – ln(2) = ln(6/2) = ln(3). Also ln(3) + 4.

Zu c): $1/e^x$ formen wir um zu e^{-x} und suchen die Stammfunktion. Die wäre bei einer e-Funktion eigentlich die Funktion selbst. Fast. Man korrigiert ggf. noch die innere Ableitung: e^{-x} abgeleitet ist $–e^{-x}$. Also wählen wir als Stammfunktion $–e^{-x}$, weil dann das Minus vom anderen Minus gefressen wird. Obere Grenze ist Unendlich, untere 1. 1 ist einfach einzusetzen; das wäre $–e^{-1}$=-1/e. Für Unendlich überlegen wir uns, was das heißt; wir setzen für x immer größere riesige Werte ein in den Ausdruck $–e^{-x}$, der nichts anderes ist als $-1/e^x$. Mit riesigen x-Werten platzt die e-Funktion und wegen „1 durch“ wird die Zahl im Endergebnis winzig. Für Unendlich ist der Ausdruck einfach Null. Wegen dem Hauptsatz müssen wir von Null den Wert -1/e abziehen, also haben wir +1/e als Ergebnis.

3. Aufgabe **(3 Punkte)**

Finde alle reellen Zahlen x, die folgende Gleichung lösen:

$$2e^{2x} + 3e^{x} = 2$$

Machen wir. Aber erst nach der Arbeit. Wie schon besprochen geht man wieder in die u-Welt und löst $2u^2+3u=2$. Am Ende geht man zurück in die x-Welt, indem man $e^x=u$ löst.

4. Aufgabe **(2 Punkte)**

Gegeben sind drei Punkte A, B und C im dreidimensionalen Raum. Beschreibe ein Verfahren, wie du entscheiden kannst, ob die drei Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden!

Man prüft die Längen der Verbindungsvektoren AB, AC und BC (Vektorpfeilchen gehen hier im Word so schwer). Sind alle gleich lang, dann muss das Dreieck gleichseitig sein.

5. Aufgabe **(1 Punkte)**

Gegeben ist die Gerade g mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ ist reell})$$

und der Punkt Q(1|2|3). Gib eine zu g parallele Gerade h an, für die Q ∈ h gilt!

$$\boldsymbol{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ ist reell})}$$

6. Aufgabe **(4 Punkte)**

Begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!

a) Ein Ortsvektor ist ein spezieller Verbindungsvektor.

b) Ein Verbindungsvektor hat nie den Betrag 1.

c) Ein Einheitsvektor ist beispielsweise $\vec{e} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) Es gilt nie $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$, wenn $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ gilt!

e) Für die Skala der x1-Achse nimmt man in der Schule auch 1cm pro Längeneinheit.

f) Vektoren sind Zahlen.

a) stimmt. Ist der Verbindungsvektor eines Punktes zum Ursprung.
b) ist falsch, denn ist der Abstand zweier Punkte 1, dann hat der VV die Länge 1.
c) ist falsch, weil der Betrag des Vektors mit $3^2+(-4)^2=25$ eben 5 und nicht 4 ist!
d) Doch, wenn die Vektoren in dieselbe Richtung zeigen, geht das. Ein Beispiel: (1,0,0)+(1,0,0)=(2,0,0) erfüllt die Bedingungen.
e) ist falsch, es ist (völlig willkürlich) eine Kästchendiagonale.
f) ist falsch. Obwohl Zahlen Vektoren sein können; in einem eindimensionalen Raum wäre ja 1 einfach (1) ;-)

7. Aufgabe **(2 Punkte)**

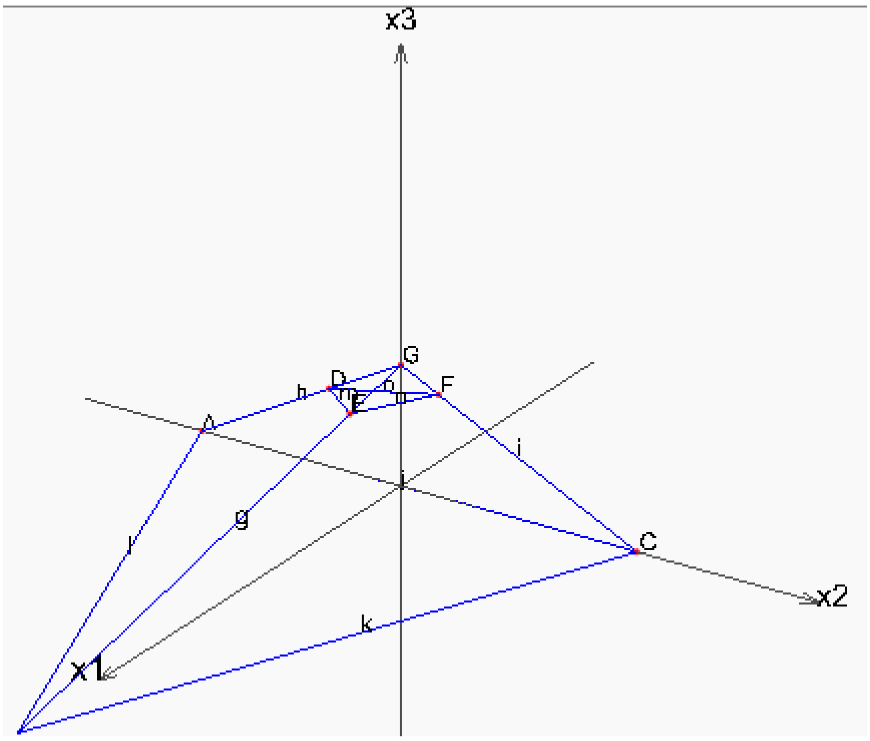
Berechne näherungsweise den absoluten Flächeninhalt, den die beiden Funktionen f und g mit f(x)=sin(x) bzw. g(x)=3sin(x)+1 im Bereich von x=0 bis x=10 einschließen!

Das geht mit MATH 9:fnInt und mit MATH -> NUM 1: abs. Die Befehlszeile ist dann diese: fnInt(abs(sin(X) - (3sin(X)+1)), X,0,10). Die Farben sind dafür da, dass du die Übersicht behalten kannst. Der GTR liefert nach einigem Rechnen dann 16,4.

8. Aufgabe **(6 Punkte)**

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte A(0|-6|0), B(12|0|0) und C(0|6|0). Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die obere Deckfläche hat die Eckpunkte D(0|-2|2), E(2|0|2,5) und F(0|1|2,5).

a) Fertige eine Skizze des Pyramidenstumpfes im kartesischen Koordinantensystem an.
b) Weise nach, dass G(0|0|3) die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.



Schon in der Zeichnung steckt eine Art „Beweis", aber würde man es rechnerisch machen wollen, könnte man so vorgehen: Wenn D, E bzw. F auf den Strecken von AG, BG bzw. CG liegen, dann passt es. Um das prüfen zu können, muss man allerdings 3 Geraden aufstellen und Punktproben machen, was Einiges an Arbeit ist.

9. Aufgabe **(2 Punkte)**

Bestimme, wenn möglich, den Wert a so, dass der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$$

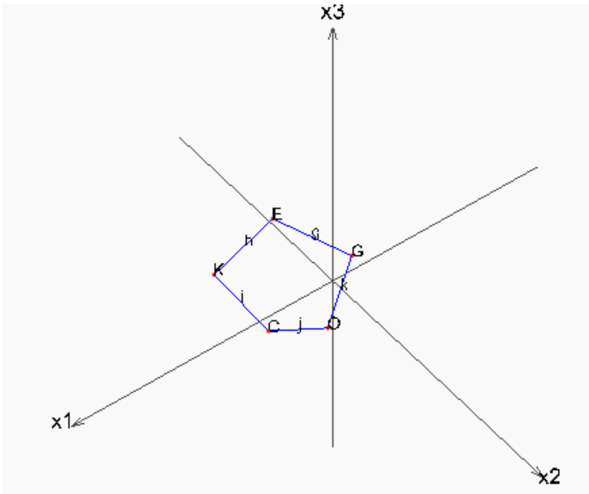
den Betrag 1 hat!

Das wird leider nix. Weil auch wenn a=0 ist, ist der Betrag bereits mit Wurzel aus $2^2+0^2+(-2)^2$ bei Wurzel(8). Ist a ungleich Null wächst (wegen dem Quadrieren!) die Zahl unter der Wurzel noch weiter an. Also gibt es kein a!

10. Aufgabe **(5 Punkte)**

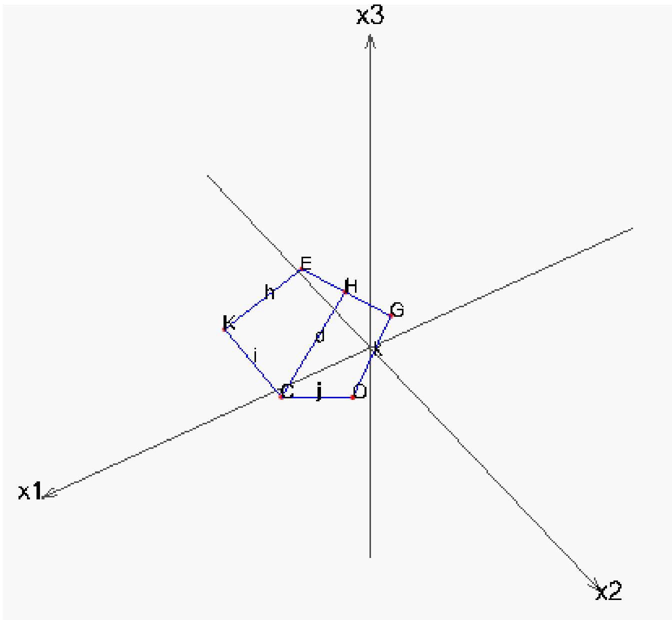
Gegeben ist das Fünfeck G E K C O mit G(0|1|2), E(1|-2|2), K(4|-1|2), C(4|2|2) und O(2.5|3|2).

a) Weise mit einer Skizze nach, dass es sich tatsächlich um ein Fünfeck handelt.
b) Wie groß ist der Abstand der Seitenmitte der Seite $\overrightarrow{GE}$ zum Punkt C?



Ist ein Fünfeck...

Um den Abstand bestimmen zu können, brauchen wir den Punkt, der genau in der Mitte von E und G liegt. Den finden wir, wenn wir bspw. von E den halben Verbindungsvektor EG nach G laufen. Haben wir diesen Hilfspunkt H erreicht, müssen wir nurnoch den Verbindugsvektor HC bilden und dessen Betrag bestimmen:



H hat die Koordinaten H(0.5, -0.5, 2). Damit ist d(C,H) zu berechnen über die Wurzel aus $3{,}5^2+2{,}5^2+0^2$, was in etwa 4,3 ergibt.