EI M5 2010-11	MATHEMATIK 3. Probeklausur - Lösung

1. Aufgabe – light up! **(8 Punkte)**

Berechne die folgenden Integrale mit dem Hauptsatz.

$a)\ \int_0^4 (2+x)^3\,dx$ $\quad b)\ \int_{10}^{20} \frac{3}{x^2}\,dx$ $\quad c)\ \int_{-a}^{a} \cos(3x)\,dx$ $\quad d)\ \int_{10}^{20} \frac{x^2+2x}{x^4}\,dx$

Für die a) werden wir bald ein einfaches Verfahren kennen lernen. Vorher müssen wir leider ausmultiplizieren. Hoch 3 bedeutet (…)*(…)*(…). Wir wissen, was ()*() ist (Binomische Formel) und finden so: $(2+x)^3 = (2+x)^2(2+x) = (4+4x+x^2)(2+x) = (8+8x+2x^2)+(4x+4x^2+x^3) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Dann können wir eine Stammfunktion finden: $F(x) = x^4/4+6x^3/3+12x^2/2+8x = x^4/4+2x^3+6x^2+8x$. Nun müssen wir noch F(4) bzw. F(0) ausrechnen und beides voneinander abziehen. F(0)=0 ist klar und F(4)=64+128+96+32=320. Also ist das Integral=320. Die Zahlen sind für den Pflichtteil etwas zu groß.

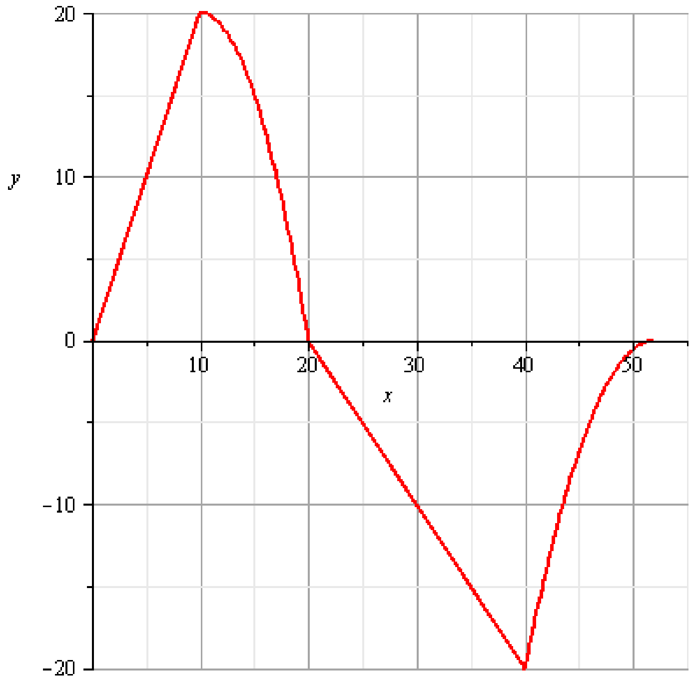
Bei b) zerlegt man $3/x^2$ zu $3*1/x^2$ und dann überlegt man sich, was $1/x^2$ aufgeleitet ergbit. <u>Ein Tipp: Überlege dir für $1/x^2$ und $1/x^3$ die Stammfunktionen, die kommen oft dran. Wenn ein Minus davor ist, einfach ein Minus vor deine Stammfunktion!</u> $F(x)=-x^{-1}$ für $f(x)=1/x^2$. Man schreibt F(x) dann als F(x)=-1/x. Also ist das Integral 3*F(20) – 3*F(10) = 3*(-1/20) – 3*(-1/10) = -3/20+3/10. Hier war Minus mal Minus zu beachten. Also -3/20+6/20, insgesamt sind das 3/20.

Die c) ist komisch, daher habe ich die Grenzen mal auf +a und –a geändert… cos(3x) aufgeleitet ergibt sin(3x)/3. Das durch3 brauchen wir, weil sin(3x) abgeleitet 3cos(3x) ergibt (Kettenregel). Dann setzt man a und –a ein und erhält für das Integral sin(3a)/3 – sin(-3a)/3. Der Sinus ist punktsymmetrisch und so ergibt sich insgesamt 0, egal was a genau ist!

In der d) musst du erst einmal den Bruch zerlegen, danach wird es einfach. So ergibt sich $x^2/x^4 + 2x/x^4$. Dann kann man kürzen zu $1/x^2+2/x^3$. Hier kennen wir die Stammfunktion, sie lautet $-1/x+2*(-1/2x^2)=-1/x-1/x^2$. Überlege dir dafür noch einmal, was abgeleitet $1/x^3$ ergibt! Danach setzt man 20 ein und erhält -1/20-1/400=-21/400 und für 10: -1/10-1/100=-11/100. Auch hier sind die Zahlen für den Pflichtteil schwer. Das Integral insgesamt ergibt dann -21/400 – (-11/100), was -21/400+11/100=-21/400+44/100=23/400 entspricht.

2. Aufgabe **(6 Punkte)**

Das folgende Schaubild beschreibt die Zuflüsse und Abflüsse von Wasser eines Stausees. Die y-Achse zeigt den Zufluss in Mio. Litern Wasser und die x-Achse zeigt die Zeit in Wochen (der Graph endet nach 52 Wochen).



a) Argumentiere anhand des Schaubildes, an welcher Stelle der Stausee am meisten Wasser enthält.

Nach 20 Wochen. Denn bis dahin gibt es nur Zufluss. Danach sinkt der Wasserstand.

b) Bestimme die Terme der beiden Geradenabschnitte im Schaubild.

Hier muss man „Kästchen zählen". Die erste Gerade beginnt im Ursprung und für 10 rüber geht's 20 nach oben, also y=2t. Die zweite Gerade hat die Steigung -1; denn geht man 20 rüber, geht's 20 runter. Der y-Achsenabschnitt muss dann bei 20 liegen und man hat y=-t+20.

c) Wenn am Anfang des Jahres 5 Mio. Liter Wasser im Stausee waren, wieviel Wasser ist dann am Ende des Jahres ungefähr im Stausee? Verwende für die vier verschiedenen Abschnitte diese Terme: $y=2t$, dann $y=20-0{,}2(t-10)^2$, dann $y=-t+20$ und zuletzt $y = -0{,}14t^2 + 14{,}56t - 378{,}56$.

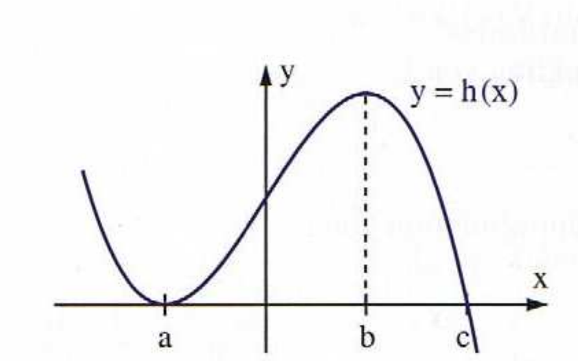
Hier kann man sein Ergebnis aus b) überprüfen. Wir haben richtig gerechnet. Um die Fragen zu beantworten, müssen wir insgesamt 4 Integrale berechnen. Die ersten beiden sind positiv zu zählen, die 2 hinteren negativ. Wir berechnen also den orientierten Flächeninhalt! Diese Integrale sind gemeint:

$$\int_0^{10} 2t\,dt, \quad \int_{10}^{20} 20-0.2(t-10)^2\,dt, \quad \int_{20}^{40} -t+20\,dt, \quad \int_{40}^{52} -0.14t^2+14{,}56t-378.56\,dt$$

Dies würde man mit dem GTR ausrechnen (besonders 2 und 4), also lassen wir das! Wichtig wäre das Verständnis. In der Arbeit wären die Flächen angegeben.

3. Aufgabe **(6 Punkte)**

In der Abbildung ist der Graph der Funktion h gezeichnet. H ist eine Stammfunktion von h mit H(a)=5.



a) Trage in die folgende Tabelle ein, ob die Funktionswerte von H und h an den Stellen a, b bzw. c entweder positiv, negativ oder Null sind.

Für h ist das direkt ablesbar! Für H nicht, allerdings weiß man, dass H(a)=5 ist. Dann ist das schon einmal klar:

	H	h
a	**Positiv**	**Null**
b		**Positiv**
c		**Null**

Wie ist es für H(b) und H(c)?! Da h immer positiv bzw. Null ist, kommt zu H immer mehr dazu! Also sind auch diese beiden positiv.

4. Aufgabe **(2 Punkte)**

Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen von f mit $f(x) = 3x^2$, der Geraden $y = -7x+10$ und der x-Achse begrenzt wird.

Entfällt in der Arbeit, daher hier auch keine Lösung! Wir kommen darauf zurück!

5. Aufgabe **(2 Punkte)**

Es liegt dir die Funktion f mit $f(x) = 3\cdot\cos(3x)\cdot\cos(x) - \sin(3x)\cdot\sin(x)$ vor.

a) Weise nach, dass die Funktion F mit $F(x)=\sin(3x)\cdot\cos(x)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Wenn du F ableitest, soll also f rauskommen. Prüfen wir das: F ist ein Produkt, also brauchen wir die Produktregel (uv)‘=u’v+v’u mit u=sin(3x) und v=cos(x). u‘=3cos(3x) wegen der Kettenregel und v‘=-sin(x). Setzt man das in u’v+v’u ein, kommt gerade f(x) heraus! Es stimmt.

b) Gib eine andere Stammfunktion $\underline{F}(x)$ zu f(x) an.

Wir addieren zu F(x) einfach eine Konstante, bspw. 4: F(x)=sin(3x)cos(3x)+4. Dann gilt auch F‘=f.

6. Aufgabe **(2 Punkte)**

Berechne die obere Integrationsgrenze!

$$\int_{1}^{a} 2x + 1 \, dx = 6{,}75$$

Diesen Aufgabentyp hatten wir so noch nicht, aber wir können einfach mal anfangen:

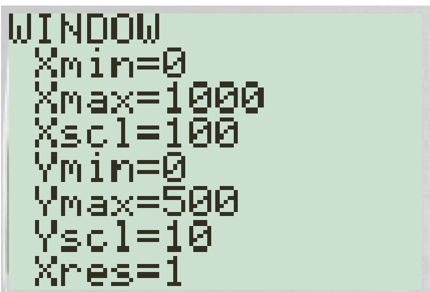
2x+1 wird zu x^2+x. Also müssen wir von a^2+a gerade $1^2+1=2$ abziehen und erhalten so: a^2+a-2. Das soll jetzt 6,75 werden bzw. $a^2+a=8{,}75$. Am besten bringt man alles nach links und hat so $a^2+a-8{,}75=0$. Jetzt sucht man im Endeffekt nur noch Nullstellen. Das können wir mit der abc- oder der pq-Formel direkt lösen. Man findet $a_1=2{,}5$ und $a_2=-3{,}5$. Da wir bei 1 anfangen, macht wohl nur a_1 Sinn! Also gilt $a=2{,}5$.

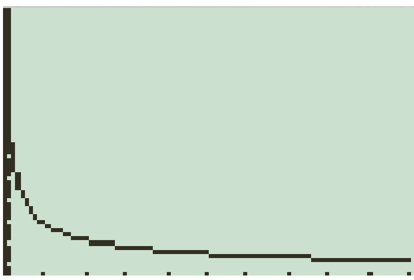
7. Aufgabe **(4 Punkte)**

In einem alten Film fliegt Lazlo Opaschowski mit einer aus Titan gebauten Rakete in Richtung Alpha-Centauri. Die Fluggeschwindigkeit beträgt $v(t) = \frac{1000}{\sqrt{t+1}}$ mit t in Stunden und v in km/h.

a) Wie weit ist die Rakete nach einem Monat in etwa gekommen?

Hier sollte man sich erst einmal klar machen, was das bedeutet. Wir kennen die Geschwindigkeit v. Dann ist die Fläche unter v gerade die zurückgelegte Strecke s. Also geben wir in den GTR das v(t) ein und integrieren von 0 bis 1 Monat. ACHTUNG: v ist in Stunden gegeben. Wieviele Stunden entsprechen einem Monat? 30 Tage je 24h, also 720h. Wir integrieren von 0 bis 720 und stellen das WINDOW mal auf xmax=1000:






Der GTR braucht hier etwas und dann überschreibt er noch das schwarze Bild. Naja. Raus kommen grob 50000km, da v in km/h angegeben war.

b) Denkst du, dass die Rakete unendlich weit fliegt? Begründe deine Vermutung.

Hier muss man einfach größere Grenzen einsetzen. Wir probieren einmal 2000 als obere Grenze und schauen, ob da noch viel zu den 51702,886 dazukommen. Man muss die Grenze übrigens auch auf mind. 2000 umstellen, sonst kommt ein Fehler.

Und man vermutet, dass die Rakete immer weiter fliegt. Ob dem wirklich so ist, können wir so aber eigentlich nicht richtig entscheiden. Mehr dazu nach der Arbeit.

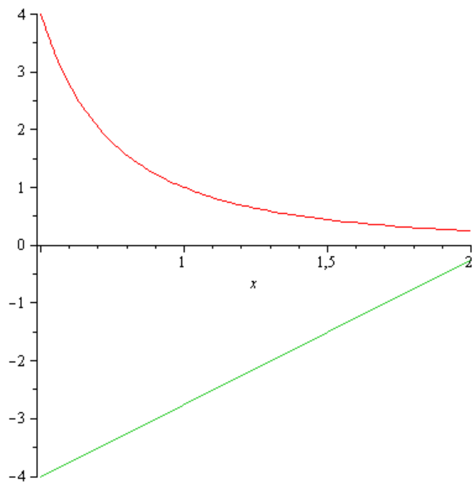
8. Aufgabe **(5 Punkte)**

Gegeben sind die Terme der beiden Funktion f und g:

$$f(x) = -x^{-2} \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = 2{,}5\,x - 5{,}25$$

a) Wie groß ist die Fläche, die f mit der x-Achse zwischen x=0.5 und x=2 einschließt?
b) Wie groß ist die Fläche, die g mit der x-Achse zwischen x=0.5 und x=2 einschließt?

Hier muss man einfach die beiden Funktionen nacheinander in den GTR eingeben und mit CALC und 7:INT integrieren.



c) Berechne die Schnittpunkte der beiden Schaubilder!

Den Schnittpunkt bekommst du mit INTERSECT, wobei das WINDOW oben nicht passend wäre. Der Schnittpunkt liegt bei ungefähr x=2,2.

d) Wie groß ist die Fläche, die von den Schaubildern von f und g begrenzt wird?

Dazu mehr nach der Arbeit! Es kommt nicht dran.

9. Aufgabe **(6 Punkte)**

Ein Wasserbehälter enthält zu Beginn (t=0) zwei Liter Wasser. Durch ein kleines Loch im Deckel wird 6 Minuten lang Wasser mit der Stärke 1 Liter je Minute zugeführt. Ein Ventil im Boden des Behälters ist zunächst geschlossen.

Nach zwei Minuten wird es langsam geöffnet, sodass die Abflussstärke zwischen der 2. und der 4. Minute linear von 0 Liter je Minute auf 2 Liter je Minute zunimmt. Zwischen der 4. und der 6. Minute ist die Abflussstärke konstant 2 Liter je Minute.

a) Wie viel Wasser ist nach 6 Minuten im Behälter?

Wir haben 2 Liter. Nun kommen die ersten 6min ja je 1 Liter pro min dazu. Also haben wir 8 Liter. Andererseits wird nach 2min das Ventil geöffnet und Wasser fließt gleichzeitig ab. zwischen 4. und 6. Minute sind es insgesamt 4 Liter (von 4 auf 5 und von 5 auf 6 je einer). Also haben wir 4 Liter drinnen. Doch auch zwischen 2. und 4. Minute sind es linear mehr 0 bis 2 Liter Abfluss. Im Schnitt sind das 1 Liter je Minute und von den noch verbleibenden 4 Litern gehen also wieder 2 Liter weg. Insgesamt sind es also 2 Liter! Genausoviel wie am Anfang…

b) Welche maximale und welche minimale Wassermengen waren während der ersten 6 Minuten im Behälter?

Naja, minimal waren es die 2 Liter zu Beginn und am Ende. Maximal war es bei Minute 3. Ab hier lief mehr aus, als ein. Also schauen wir uns das an: 3min Zufluss bedeutet 3l dazu, 2l waren es, sind 5l. Die Minuten 2-3 lief schon etwas aus, allerdings im Schnitt nur mit 0,5l pro min. Also in dieser Minute 0,5l weg von den 5l; es waren da 4,5 Liter im Behälter.

c) Die Funktion f beschreibt für 0 min $\leq$ t $\leq$ 6 min die Wassermenge im Behälter. Skizziere den Graphen von f.

Mit den obigen Lösungen solltest du es hinbekommen. Trage dir bei einige Zeiten die y-Werte ein und verbinde mit Linien!