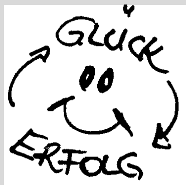
EI M5 2010-11	MATHEMATIK **2. Klausur* - Pflichtteil**	

In diesem Teil sind weder GTR noch die Formelsammlung erlaubt. Um den Wahlteil zu erhalten, gib bitte diesen Pflichtteil bearbeitet ab.

1. Aufgabe – light up! **(5 Punkte)**

Leite die folgenden Funktionsterme nach der Variablen ab und vereinfache sie!

$a(x) = (2x^3 - 3x + 1)e^x$ $\qquad b(x) = \frac{2}{e^x}$ $\qquad c(x) = (x + 1)e^{x^3-2x}$ $\qquad d(x) = \frac{1}{2x}e^{2x}$

Für a(x) benötigt man die Produktregel mit $u=(2x^3-3x+1)$ und $v=e^x$. Dann findet man $u'=6x^2-3$ und $v'=e^x$. Zusammengesetzt ergibt das dann für $a' = u'v+v'u$ folgendes: $a'(x) = (6x^2-3)e^x+e^x(2x^3-3x+1)$. Jetzt kann man noch e^x ausklammern und findet damit $a'(x)=e^x(2x^3+6x^2-3x-2)$.
Für b(x) braucht man entweder die Quotientenregel oder sieht, dass man das ganze als $b(x)=2e^{-x}$ schreiben kann und dann ist $b'(x)=-2e^{-x}$ via Kettenregel schnell gefunden.
Für c(x) muss man wieder mit der Produktregel beginnen und braucht dann sogar noch die Kettenregel. Erst einmal die Produktregel: $u=x+1$, $v=e^{x^3-2x}$ mit $u'=1$ und v' ist eben nicht so einfach. Hier muss man die Kettenregel anwenden. Bei „reinen" e-Funktionen geht die aber; man schreibt einmal den gesamten Ausdruck ab und multipliziert mit „der Inneren": $v'=e^{x^3-2x}(3x^2-2)$. Jetzt muss man das alles noch zusammensetzen: $c'=u'v+v'u=1e^{x^3-2x}+(x+1)e^{x^3-2x}(3x^2-2)$. Das ist schon ein ziemliches Monster, man kann noch ausklammern, aber wir sparen uns das.
Für d(x) muss man wieder Produktregel und für v die Kettenregel anwenden. Dabei muss man mit dem ersten Faktor aufpassen: Hier wird 1 erst durch 2 und dann noch durch x geteilt. Im Prinzip ist das 1/2 mal 1/x. Und für 1/x kann man auch x^{-1} schreiben. Das braucht man, um die Ableitung von d finden zu können! Jetzt ist also $u=1/2*x^{-1}$ mit $u'=1/2*(-1)*x^{-2}=-1/2*x^{-2}$ und $v=e^{2x}$ mit $v'=2e^{2x}$ (Kettenregel). Wieder zusammengesetzt über $u'v+v'u$ findet man dann d'!

2. Aufgabe **(2 Punkte)**

Sind die folgenden Aussagen richtig? Begründe deine Antwort!

a) Gilt $f''(a)=0$, dann besitzt die Funktion f für x=a eine Wendestelle.
b) Ein Punkt kann nie gleichzeitig Hochpunkt und Wendepunkt sein.
c) Die Funktion $f(x)=e^x+1$ besitzt keine Nullstelle.
d) Die Funktion e^{-x^2} ist y-Achsensymmetrisch.

Zu a): Das stimmt nicht unbedingt, denn bspw. muss $f'''(a)$ ungleich Null sein!
Zu b): Das ist richtig! Das wäre dann eher ein Sattelpunkt.
Zu c): Das stimmt! e^x ist immer positiv. Jetzt noch +1 und das Schaubild von f ist immer ordentlich oberhalb der x-Achse!

3. Aufgabe **(4 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für reellwertige x.

a) Bestimme die Tangentengleichung für x=4.

Für x=4 gilt t: y=mx+c mit m=f'(4). Wir brauchen f', was gerade f'(x)=1/2*x$^{-1/2}$ ist. Jetzt setzen wir x=4 und sehen, dass 4$^{-1/2}$=1/2 ist („Zahl Hoch Minus 1" bedeutet „1 durch Zahl" und „Hoch 1/2" ist ja die Wurzel. Wurzel von 4 ist 2). Also ist y=1/4*x+c, denn bei f' steht noch 1/2 vor der 1/2... Um c zu bestimmen, muss eine Punktprobe her. Der zu x=4 passende y-Wert ist y=2, also prüfen wir 2=1/4*4+c und finden 2=1+c => c=1. Die Tangentengleichung lautet t: y=1/4*x+1.

b) Gegeben ist die Gerade g: y = – 4x. Finde eine Normale von f(x), die zur Geraden g parallel liegt.

Hier ist eine Normale n von f(x) gesucht. Deren Steigung ist dann m=-1/f'(x). Die Gerade g verläuft parallel zu n und damit müssen sie dieselbe Steigung haben. Also gilt -4=m=-1/f'(x) und so sollte f'(x)=1/4 sein. Welches x passt dazu? Das findet man heraus, wenn man die letzte Gleichung nach x auflöst: 1/2*x$^{-1/2}$=1/4 bedeutet x$^{-1/2}$=1/2. Dreht man beide Brüche rum, steht x$^{1/2}$=2 da. Damit muss x=4 sein. Jetzt haben wir also den x-Wert gefunden, zu dem die Normale passt. Das c der Normalen kennen wir noch nicht. Aber durch eine Punktprobe wie in a) finden wir das heraus: x=4 => y=2 und so muss 2=-4*4+c gelten oder eben c=18. n: y=-4x+18.

c) Beschreibe, wie du den Schnittwinkel zwischen der Tangenten aus a) und der Normalen aus b) mit dem GTR bestimmen würdest!

Den Schnittwinkel der Tangenten mit der x-Achse zu bestimmen geht über tan(alpha)=m. Gleiches gilt für die Tangente. So bekommt man zwei Winkel relativ zur x-Achse. Die Differenz dieser beiden Winkel ist dann der Schnittwinkel der beiden Geraden.

EI M5 2010-11	MATHEMATIK 2. Klausur* – Wahlteil	

In diesem Teil sind GTR und Formelsammlung erlaubt. Vergiss aber nicht, deinen Gedankengang zu dokumentieren. Damit ich weiß, was du dir so überlegt hast.

4. Aufgabe **(8 Punkte)**

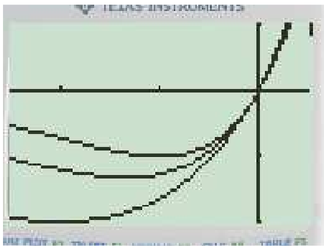
Gegeben ist die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ für reelles a > 0.

a) Zeige, dass der Punkt P(0|0) auf jedem Graphen der Kurvenschar liegt.

Setzen wir mal x=0 und schauen, ob immer y=0 herauskommt: $f(0)=0*e^{a*0}=0$, das passt. Also ist egal, was a ist; für x=0 wird's y auch 0.

b) Skizziere mithilfe deines GTRs die Graphen für f_1, $f_{0,75}$ und $f_{0,5}$ für -2,5 < x < 0,5.

Das geht mit dem GTR und der {-Klammer (alternativ könnte man übrigens auch in Y1 das f_1 eintragen, in Y2 das $f_{0,75}$ und in Y3 das $f_{0,5}$):



c) Bestimme die Extrempunkte der Kurvenschar.

Man sieht in b) bereits, dass es einen Tiefpunkt irgendwo bei der 2 gibt (natürlich abhängig vom Parameter). Theoretisch kann man die f''-Prüfung wegfallen lassen, wenn man das Schaubild als Argument verwendet!

Die Ableitung von f geht über die Produktregel: $f'=1e^{ax}+axe^{ax}=(1+ax)e^{ax}$. Hier muss man jetzt die Nullstellen finden. Da f' als Produkt geschrieben ist, suchen wir das x, für das (1+ax) Null wird und ggf. weitere x, für die die e-Funktion Null wird. Zuerst die Klammer: 1+ax=0 => ax=-1 => $x_1=-1/a$. Die e-Funktion wird NIE Null und daher gibt es nur dieses eine x. Jetzt muss man noch f'' bilden (oder eben am Schaubild argumentieren), um nachzuweisen, dass dieser Kandidat x_1 auch wirklich zu einem Tiefpunkt gehört: $f''=ae^{ax} + (ae^{ax} + ae^{ax}(1+ax)) = 2ae^{ax} + ae^{ax}(1+ax)$. Setzen wir hier x=-1/a ein, dann fliegt die Klammer und damit der 2. Summand raus und es bleibt $2ae^{-1}$ stehen. Da a>0 ist, ist das sicher >0 und damit haben wir einen Tiefpunkt für $x_1=-1/a$. Den passenden y-Wert finden wir über $y_1=f(x_1)=-1/a*e^{-1}+1$. Also notieren wir $T(-1/a|-1/a*e^{-1}+1)$.

d) Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte.

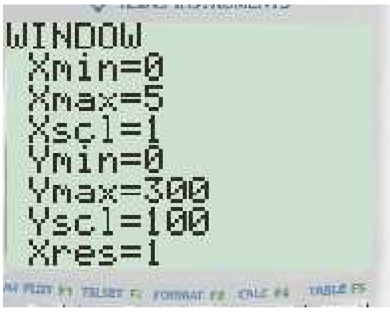
Für die Ortskurve notieren wir noch einmal x=-1/a und $y=-1/a*e^{-1}+1$. Jetzt lösen wir die erste Gleichung nach a auf: a=-1/x. Wir setzen das in die y-Gleichung ein

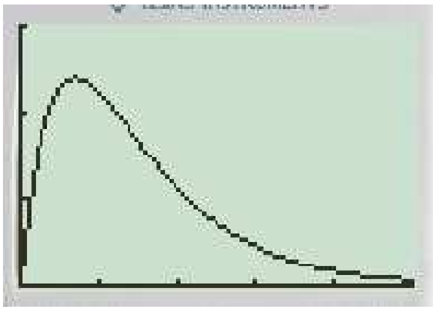
und erhalten (Achtung: Doppelbruch): $y=x*e^{-1}+1$. Die Ortskurve ist also eine Gerade mit c=1 und $m=e^{-1}$.

5. Aufgabe **(6 Punkte)**

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit 160 m/min an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher. Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Motorbootes ist für t>0 stets positiv und wird durch $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$ beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit $v(t)$ in m/min).

a) Skizziere das Zeit-Geschwindigkeit-Schaubild des Motorbootes in diesem Zeitraum für die ersten 5 Minuten.





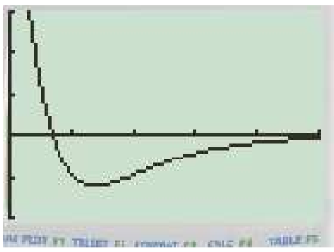
(Hier muss man am Ymin bzw. Ymax rumprobieren.)

b) Bestimme die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum.

Dazu einfach über CALC auf 4:maximum gehen und den Hubbel auswerten; man findet Y=240. Also ist die Höchstgeschwindigkeit 240m pro Minute.

c) Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes im selben Zeitraum am stärksten ab?

Am stärksten abnehmen bedeutet, wo die Kurve am steilsten abfällt. Also geht es um die Steigung und damit um f'. Mit nDeriv können wir uns auch diese Kurve zeichnen (das WINDOW passt erst einmal nicht):



Die Steigung soll abfallen, also muss sie negativ sein. „Am stärksten" meint dann, dass wir den Tiefpunkt suchen und finden werden wir ihn mit CALC und 3:minimum. t ist damit etwa 1,4min.

d) Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot?

Dazu gehen wir wieder in das erste Schaubild und schauen, wie lange die Kurve über 160 (m/min) liegt. Dazu geben wir eine Gerade Y=160 ein und werten mit CALC und 5:intersect aus (oder mit TRACE). Man findet X=0.24 und X=1.55. Für ca. 1,3min war das Motorboot schneller als das Segelboot.