EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* # 1. Klausur - Lösungen

1. Aufgabe – light up! **(7 Punkte)**

Leite die folgenden Funktionsterme nach der Variablen ab und vereinfache sie!

$a(x) = \sin(x)\cos(x)$ $\quad$ $b(x) = \sin(2x) + \cos^2(x)$ $\quad$ $c(x) = \frac{6}{5x^3} - \frac{5x^2}{2}$

$d(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad$ $e(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

b(x) und d(x) geben je 2 Punkte, die anderen Funktionsterme jeweils 1 Punkt.

zu $a(x) = \sin(x)\cos(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

Produkt zweier Fkt. → Produktregel: $u'v + v'u = a'$

$u(x) = \sin(x)$, $v(x) = \cos(x)$ mit

$u'(x) = \cos(x)$, $v'(x) = -\sin(x)$ und damit

$a'(x) = \cos(x)\cdot\cos(x) + (-\sin(x))\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

zu $b(x) = \sin(2x) + \cos^2(x)$. Hier zwei Funktionen mit + verbunden. Das bedeutet, dass man sie einzeln ableiten kann und dann addiert...

$\sin(2x)$: Das ist eine Verkettung! → Kettenregel!

$u(v) = \sin(v)$, $v(x) = 2x$ mit

$u'(v) = \cos(v)$ und $v'(x) = 2$

ist $(\sin(2x))' = \cos(2x)\cdot 2$. Jetzt noch

$\cos^2(x) = (\cos(x))^2$. Wieder Verkettung, wieder:

$u(v) = v^2$, $v(x) = \cos(x)$ und

$u'(v) = 2v$ und $v'(x) = -\sin(x)$. Dann ist

$(\cos^2(x))' = 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = -2\cos(x)\sin(x)$

und insgesamt

$b'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(x)$.

zu $c(x) = \frac{6}{5x^3} - \frac{5x^2}{3} = 6\cdot\frac{1}{5x^3} - 5\cdot\frac{x^2}{2} =$

$= 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^3} - 5\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 =$

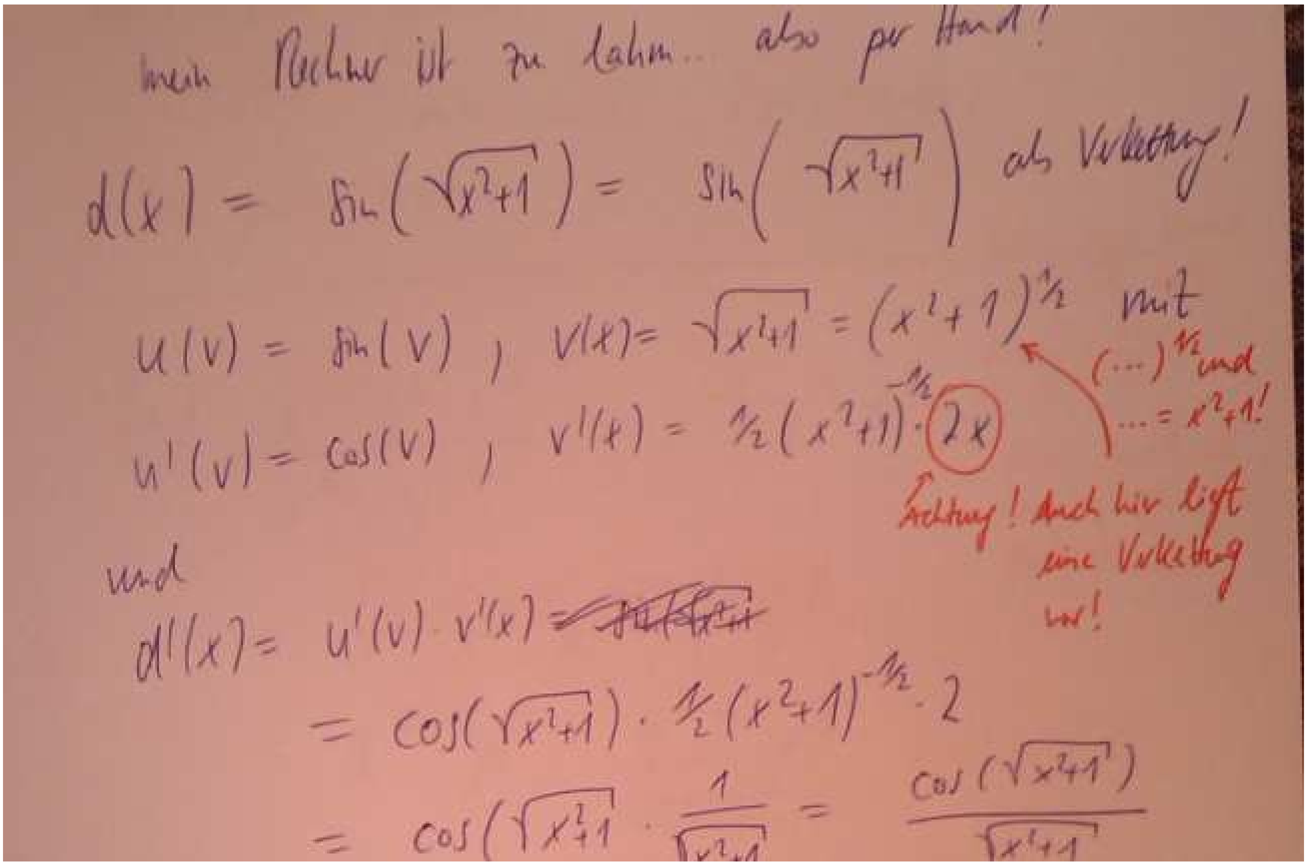
$= \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{5}{2}x^2 = \frac{6}{5}\cdot x^{-3} - \frac{5}{2}x^2$

Das muss man sehen! Dann:

$c'(x) = -3\cdot\frac{6}{5}\cdot x^{-4} - \frac{5}{2}\cdot 2x = -\frac{18}{5}x^{-4} - 5x$

$\left(= -\frac{18}{5x^4} - 5x\right)$

ab jetzt handschriftlich und abfotografiert... ist irgendwie einfacher, mein rechner ist gerade ziemlich langsam...



mein Rechner ist zu lahm... also per Hand!

$d(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ als Verkettung!

$u(v) = \sin(v)$, $v(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$ mit $(\ldots)^{1/2}$ und $\ldots = x^2+1$!

$u'(v) = \cos(v)$, $v'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$

Achtung! Auch hier liegt eine Verkettung vor!

und

$d'(x) = u'(v)\cdot v'(x) = \cancel{\ldots}$

$= \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2$

$= \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

$e(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$. Wir das nicht:

$\sin(\alpha) \Rightarrow \underset{\text{Pythagoras}}{\Rightarrow} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Also $e'(x) = 0$ … Andernfalls zweimal getrennt ableiten (also $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$) und mit $+$ zusammenbauen. $\cos^2(x)$ kennen wir schon aus der 1(e) …

$(\sin^2(x))' = (\sin(x))^2$ und das geht mit der Kettenregel: $u(v) = v^2 \Rightarrow u'(v) = 2v$
$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$

Damit wäre $(\sin^2(x))' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ und

$e'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$.

Das gleiche Ergebnis!

2. Aufgabe – Potenz und Logarithmus **(2 Punkte)**

Vereinfache die folgenden Ausdrücke!

a) $\frac{x^{-2} \cdot y^4 \cdot x^3}{x^{1/2} \cdot y^{-1}}$ b) $\log(1000^3)/2$

Wert vom Nenner ~~innerhalb~~ Zähler

2a) $\frac{x^{-2} \cdot y^4 \cdot x^3}{x^{1/2} \cdot y^{-1}} = x^{-2} \cdot y^4 \cdot x^3 \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1}$

dann dreht sich das Vorzeichen der Hochzahl um…

1P

$= \boxed{x^{-2 + 3 + -1/2}} \cdot \boxed{y^{4 + 1}}$

$= x^{0,5} \cdot y^5 = \underline{\underline{\sqrt{x} \cdot y^5}}$

2b) $\log(1000^3)/2 = 9/2 = 4{,}5$

1P

$(1000^3 = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000)$

je 10^3, 10^3, 10^3 bzw. insgesamt 10^9...

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{2x+2}$ für reelle x-Werte außer x= −1.

a) Wieso ist x= −1 nicht im Definitionsbereich dieser Funktion?

3a) Naja, bei $x=-1$ ist

$f(-1) = \frac{-1}{-2+2} = \frac{-1}{0}$ ↯ weil durch Null teilen!

1P

Daher

b) Leite $f(x)$ ab.

3b) $f(x) = \frac{x}{2x+2} = x \cdot (2x+2)^{-1}$ ein Produkt!

mit $u(x) = x$, $v(x) = (2x+2)^{-1}$

und $u'(x) = 1$, $v'(x) = -1(2x+2)^{-2}$ 2

1P

und damit ist

Achtung: Verkettung!!!

$f'(x) = 1 \cdot (2x+2)^{-1} + x(-1(2x+2)^{-2} \cdot 2)$

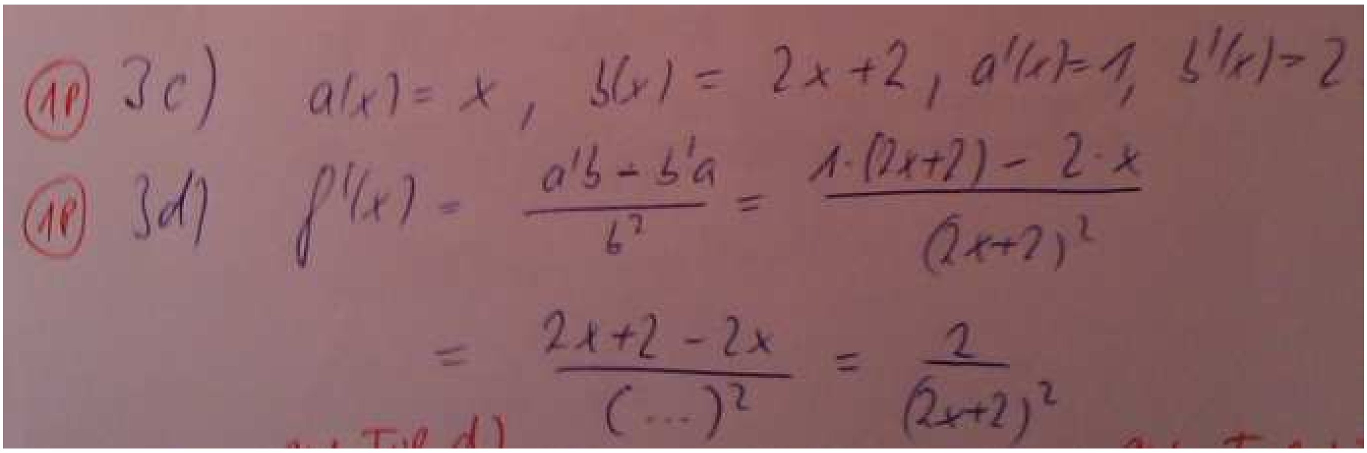
$= \frac{1}{2x+2} - \frac{2x}{(2x+2)^2}$

Es gibt eine weitere Ableitungsregel, die man nicht unbedingt braucht, die aber bei Brüchen nützlich sein kann. Sie lautet

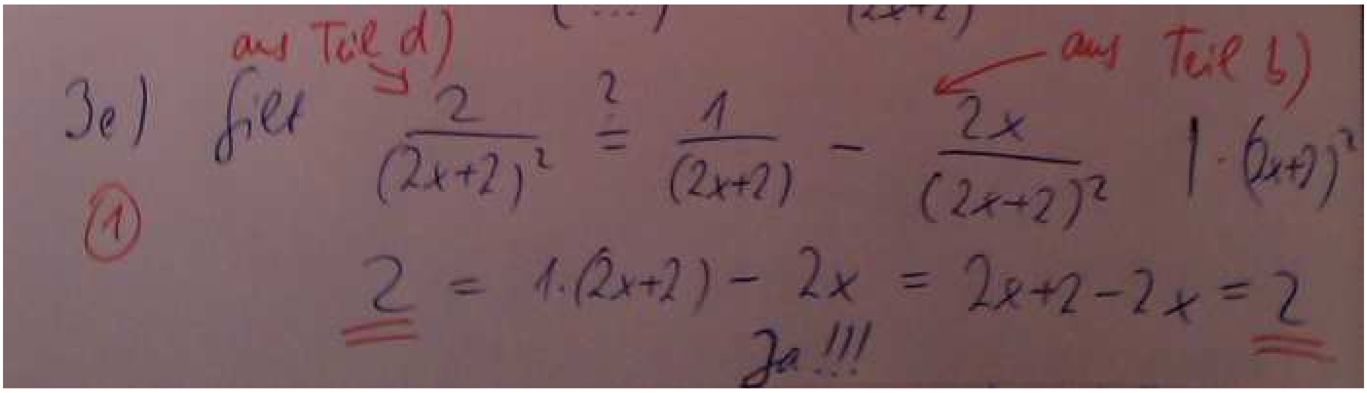
$$f'(x) = \frac{a\prime(x)b(x) - b'(x)a(x)}{b(x)^2}\text{, wenn } f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \text{ ist.}$$

c) Bestimme für den Funktionsterm $f(x)$ die Teilfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ der neuen Formel.

d) Bestimme die Ableitung $f'(x)$ mit der neuen Regel! *(ihr Name: Quotientenregel)*



e) Zeige, dass die Ergebnisse für $f'(x)$ von Teil a) bzw. Teil d) identisch sind.



Ja!!! **meint: Die Gleichung ist korrekt. Wenn linke Seite (=2) gleich rechte Seite (=2) gleich sind, sind auch die beiden "verschiedenen" Ableitungen dieselbe!**

4. Aufgabe – Kurvendiskussion gestückelt **(5 Punkte)**

Hier gibt Teilaufgabe a) einen Punkt, b) gibt 2 Punkte plus 1 Punkt für das Verhalten „weit draußen" und c) gibt wieder einen Punkt.

a) Welche Symmetrie hat die über $g(x) = \cos(x^2)$ definierte Funktion g? Ist $j(x) = \sin(x^2)$ symmetrisch und wenn ja, welche Symmetrie liegt hier vor?

4a) $g(x) = \cos(x^2)$ ist y-Achsensymmetrisch

Für $x=-1$ kommt sicher ~~[illegible]~~ der gleiche Wert heraus wie für $x = +1$, denn

$x^2 = (-1)^2 = 1$ und ($x=-1$)

$x^2 = 1^2 = 1$ ($x=1$)

b) Bestimme die Extrempunkte der Funktion h mit dem Funktionsterm $h(x) = \frac{x^3}{3} - x + 4$. Wie verhält sich $h(x)$ für sehr große positive bzw. negative x-Werte? Begründe kurz.

4b) $h(x) = \frac{x^3}{3} - x + 4 = \frac{1}{3}x^3 - x + 4$

~~$h'(x) = \frac{3x^2 - 1 ... 4}{3} = x^2 -$~~

$h'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 1 = x^2 - 1$

$h''(x) = 2x$

Jetzt $h'(x) = 0$: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

Teste $h''(1) = 2 > 0 \Rightarrow TP(1 \mid \frac{1}{3} - 1 + 4)$

$h''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow HP(-1 \mid -\frac{1}{3} + 1 + 4)$

Die y-Werte kann man noch etwas vereinfachen:

$TP(1|\frac{10}{3})$; $HP(-1|\frac{14}{3})$

für $x \to +\infty$ ist $h(x) \to +\infty$

denn $h(x)$ verhält sich wie x^3.

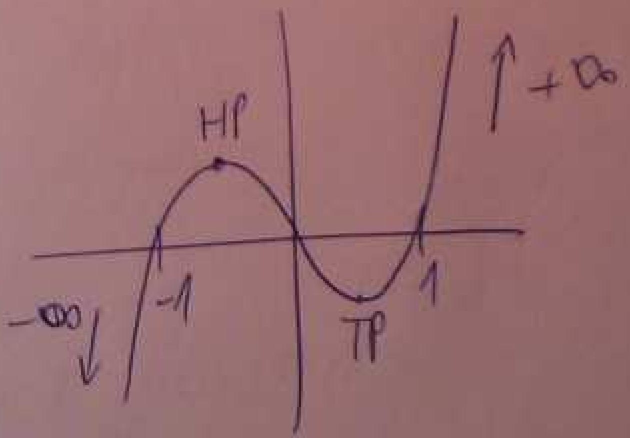
für $x \to -\infty$ ist $h(x) \to -\infty$.

c) Du hast die Funktion $i(x) = x^3 - x$ erfolgreich „diskutiert“ und diese Ergebnisse festgehalten:

- i ist punktsymmetrisch und hat die Nullstellen N1(-1|0), N2(0|0) und N3(1|0).
- für große positive x-Werte haut das Schaubild nach oben ab
- i hat einen Hochpunkt bei H(0.6|-0.4). Der Tiefpunkt ist bei T(-0.6|-0.4).

Skizziere das Schaubild von i im Bereich von x= –2 bis x = 2.

4c) Blödsinn von mir! Gemeint war:



Sorry!

EI M5 2010-11	MATHEMATIK 1. Klausur – Wahlteil	

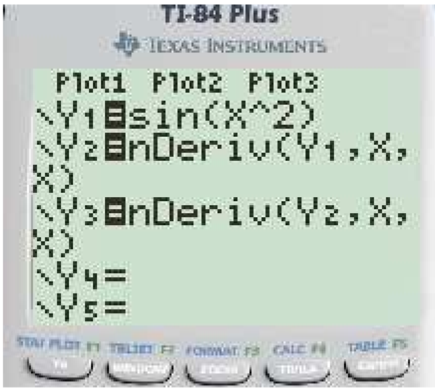
1. Aufgabe **(2 Punkte)**

Berechne folgende Werte (x im Bogenmaß):

a) $f(0), f(2)$ für $f(x) = \sin(x^2)$ b) $f'(1)$ für $f(x) = \sin(x^2)$ c) $f''(-1)$ für $f(x) = \sin(x^2)$

Hier gibt jeder Wert 0,5 Punkte!

Hier muss man den Befehl nDeriv(kennen und richtig einsetzen:



Hat man das da oben im GTR, dann geht man nur nur auf <TABLE> und liest ab. Dabei muss man darauf achten, was jetzt die Ys genau sind; Y1=f(x), Y2=f‘(x) und Y3=f‘‘(x). Man findet:

$f(0)=\sin(0^2)=0$, $f(2)=\sin(2^2)=-0.76$, $f'(1)=1.08$ und $f''(-1)=-2.285$.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Du bringst dein Konfirmationsgeld in Höhe von 2000€ auf die Bank. Sie legt das Geld mit einem Zinssatz von 3,5% p.a. (lat. per annum, meint: jährlich) für dich an.

a) Du hebst die Ersparnisse zum Abi genau 3 Jahre später wieder ab, um eine Reise zu machen. Wieviel Geld ist da gerade auf deinem Konto?

Bei einer Verzinsung von 3,5% hat man jeweils mit 1,035 zu multiplizieren, insgesamt also 2000€ mit $1{,}035^3$ und dann ergibt sich etwa 2217€.

b) Wenn du es liegen gelassen hättest, wann hätte sich dein Geld das erste Mal verdoppelt?

Wann gilt also (für welches t)

$$4000\,€ \overset{?}{=} 2000\,€ \cdot 1{,}035^t \quad |:2000\,€$$

$$2 = 1{,}035^t \quad |\log(\ldots)$$

$$\log(2) = \log\left((1{,}035)^t\right)$$

$$\log(2) = t \cdot \log(1{,}35)$$

und es ergibt sich schließlich:

$$t = \frac{\log(2)}{\log(1{,}35)} \approx 20 \text{ (Jahre)}$$

c) Bei welchem Zinssatz verdoppelt sich dein Geld in genau 10 Jahren?

Wann (für welch Zinssatz) gilt

$$4000\,€ \overset{?}{=} 2000\,€ \cdot x^{10} \quad |:2000\,€$$

$$2 = x^{10} \Rightarrow x = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}07$$

Also für etwa 7%.

3. Aufgabe **(6 Punkte)**

Du verkaufst in deinem Tante-Emma-Laden Obst. Dazu steht eine Schale an der Kasse, in der Birnen liegen. Diese beziehst du kostenfrei und ausreichend aus deinem eigenen Bio-Schrebergarten. Die Birnen sind mit je 50 cents ausgezeichnet. Du machst dir Gedanken, den Preis zu ändern, um deinen Gewinn zu maximieren.

Natürlich verkaufst du in Abhängigkeit des Preises x in cents mehr bzw. weniger Birnen. Und zwar genügt dieser Birnenverkauf B der Gleichung $B(x) = 10 \cdot \sqrt{100 - x}$, was du durch eine Kundenbefragung herausgefunden hast.

Hier gibt Teilaufgabe a) einen Punkt, Teilaufgabe b) einen Punkt plus einen Punkt und Teilaufgabe d) [c) eigentlich…] stolze 3 Punkte.

a) Wie hoch solltest du laut Formel den Preis maximal ansetzen, um überhaupt etwas zu verkaufen?

3a)

$\sqrt{100-x}$ ist kritisch:

für $x = 100$ ist das schon Null,

danach wird es negativ

Also ist $x = 100$ die Grenzstelle

und $\boxed{x = 99 \text{ (cents)}}$ der Höchstmögliche

Preis, bei dem man dann übrige

$B(99) = 10 \cdot \sqrt{100-99} = 10\sqrt{1} = \underline{\underline{10}}$

Birnen verkauft...

b) Wie viele Birnen verkaufst du bei einem Preis von 70 cents? Wie hoch ist hier dein Gewinn?

3b) $B(70) = 10 \cdot \sqrt{30} \approx \underline{\underline{55 \text{ Birnen}}}$

Gewinn? Naja, je Birne gibts 70 cents, 55 sind es, also $55 \cdot 70$ cents, was etwa 3850 cents = 38,5 € entspricht.

d) Welches ist der optimale Verkaufspreis? *Du solltest möglichst viel Obst zu einem möglichst hohen Preis verkaufen! Stelle dazu deine Gewinnfunktion auf, die du aus dem Verkaufspreis und der Birnenverkaufsfunktion* B *bilden kannst. Maximiere diese Gewinnfunktion!*

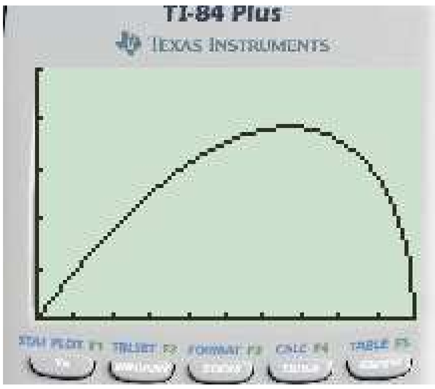
3c) Wenn man den Preis auf x cents festsetzt, dann wird man $B(x)$ Birnen verkaufen (Bsp. s. 3c)).
Der Gewinn ist das <u>Produkt</u> aus Preis und Verkaufszahl,

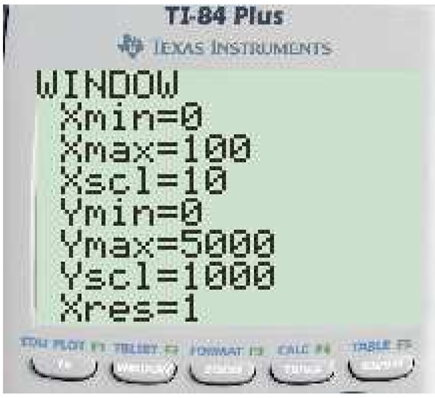
also Gewinn = Preis · Verkaufszahl

$$G(x) = x \cdot B(x)$$
$$= x \cdot 10 \cdot \sqrt{100 - x}$$

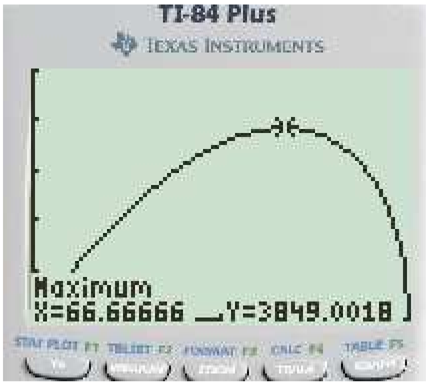
Dieses G muss für x=0 bis x=100 maximiert werden! Das soll per GTR mit <calc> und <max>.

Im GTR ist die Funktion G(x) als Y1 einzugeben und dann das <WINDOW> anzupassen. Denkt dran, der Preis liegt zwischen 0 cents und 100 cents, also ist x von 0 bis 100 einzustellen. Der y-Wert könnte eventuell nicht so klar sein. Doch hat man ja im c)-Teil schon einmal einen Fall berechnet und der lag bei 3850 cents Gewinn. Also stelle ich den y-Wert im GTR von 0 bis 5000 ein und erhalte dieses:



mit


Das ist noch zu maximieren. <CALC> hilft und man findet das Maximum bei:



Man hätte auch noch etwas mehr reinzoomen können, aber das ist schon ok so. Also bei 66 bzw. 67 cents erreicht man das Gewinnmaximum. Man verkauft jetzt „möglichst viele Birnen zu einem möglichst hohen Preis“!