EI 9c PH 2009-10	*PHYSIK/MATHEMATIK* # "Logarithmus-Aufgabe"	$10^{\log(4)}=4$

„Der Logarithmus übersetzt eine (aufwendige) Multiplikation in eine (einfache) Addition."

Der Logarithmus war in der Zeit vor Computern sehr wertvoll, denn er überführt Multiplikationen in Additionen. Mit ihm lassen sich Gleichungen vom Typ „$10^x = 300$" lösen.

Um direkt zu der Anwendungsaufgabe aus dem Unterricht zu kommen, gehe zu Station 6. Die vorherigen Stationen sind zur Vorarbeit. Nur wenn Schritte in der Aufgabe unklar sind, solltest du zu den Stationen 1-5 zurückzugehen.

STATION 1:

Du solltest dich mit den Potenzrechenregeln auskennen; ganz kurz ein Beispiel:

$$1000 \cdot 1000 = 1000000 \quad \text{lautet mit der Potenzschreibweise:} \quad 10^3 \cdot 10^3 = 10^6.$$

Man kann beim Multiplizieren mit gleicher Basis (hier die 10) die Hochzahlen addieren.
Falls du hierzu weiterführende Infos brauchst, gibt es bereits ein Blatt für eine andere Klasse, das hier verlinkt ist: http://www.steffen-haschler.de/schule/Arbeitsblatt/potenzen.pdf.

STATION 2*:

Wir suchen die Hochzahl, die nötig ist, um folgende Gleichung zu lösen:

$$10^x = 1000$$

Wir kennen das Ergebnis; es lautet x=3. Auch für 100 auf der rechten Seite finden wir sofort die Lösung; es ist x=2. Wie sieht es aber „dazwischen" aus?! Es sollte auch möglich sein, Zwischenwerte des Bereichs 100..1000 zu erreichen, dann sollte die Hochzahl zwischen x=2 und x=3 liegen. Ein Beispiel, in dem wir umgekehrt vorgehen und uns mal x=2,5 vorgeben:

$$10^{2,5} = \ ? \ \ldots \ Wir\ erinnern\ uns\ an\ die\ Potenzrechenregeln\ (Station\ 1):$$
$$10^{2,5} = 10^{2+0,5} = 10^2 \cdot 10^{0,5} = 100 \cdot \sqrt{10} \approx 316.$$

Und so haben wir einen Wert zwischen 100..1000 erreicht, wobei wir für das Wurzelziehen den GTR verwenden. Mit diesem kann man natürlich auch direkt $10^{2,5}$ eingeben: „10", dann „^", dann „(", dann „2,5", jetzt „)" und mit ENTER bestätigen.
Solche Gleichungen sind grundsätzlich interessant, wie wir in Station 6 sehen werden. Wegen der Wichtigkeit der Idee bekommt die Lösung x solcher Gleichungen einen eigenen Namen; x=2,5 in unserem Beispiel heißt auch „$\log_{10}(316)$" oder einfach „log(316)" oder „2,5 ist der Logarithmus von 316 zur Basis 10". Auf Deutsch: „2,5 ist die Hochzahl, mit der ich 10 potenzieren muss, um 316 zu erreichen." Wobei es zwar nicht genau 316 ist, aber kleine Fehler darf man ja mal machen…

STATION 3:
Nutzen des Logarithmus: Diese neue Begriff soll uns auch etwas bringen. Wir gehen zu den Zahlen der ersten Station zurück:

$$1000 \cdot 1000 = 1000000 \quad \text{oder einfacher mit der Potenzschreibweise:} \quad 10^3 \cdot 10^3 = 10^6.$$

Schauen wir uns das noch einmal genauer an:

$$1000 \cdot 1000 = 10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3} = 10^6 = 1000000$$

So haben wir das gelöst. Wenden wir mal den Logarithmus an: Auf der rechten Seite ist 6 die Hochzahl, mit der man 10 malnehmen muss, um eine Millionen zu erreichen. Links stehen zwei Zahlen, die multipliziert werden und am Ende eine Millionen ergeben. Dabei stehen beide 3er für die Zahl, die man benötigt, um jeweils die 1000 zu erreichen. Addiere ich die beiden „Logarithmen" 3 und 3, so erhalte ich ja 6. Interessanterweise addiere ich die Hochzahlen 3 und 3 und bekomme so ein Ergebnis für eine Multiplikation „eine Ebene tiefer". Das ist das Wichtige und Neue am Logarithmus. Es gibt eine ganz wichtige und praktische Folgerung:

STATION 4:

$$\log(1000000) = \log(1000 \cdot 1000) = \log(1000) + \log(1000)$$

Der Logarithmus übersetzt eine Multiplikation in eine Addition der Hochzahlen (und umgekehrt).

STATION 5:
Es gilt noch mehr als in Station 4, wenn wir weiter umformen:

$$\log(1000) + \log(1000) = 2 \cdot \log(1000) \qquad (1)$$

Klar, links steht zweimal der log(1000), das kann man zusammenfassen. Wir erinnern uns nochmal hieran:

$$1000 \cdot 1000 = 10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3} = 10^6 = 1000000$$

Man hätte im zweiten Schritt auch

$$1000 \cdot 1000 = 1000^2$$

schreiben können, es ist genau dasselbe. Dann muss aber der Logarithmus für „1000 mal 1000" genau derselbe sein wie für „1000^2". Also:

$$\log(1000 \cdot 1000) = \log(1000^2)$$

Wir haben schon in Gleichung (1) rausgefunden, dass die Linke Seite einfach $2 \cdot \log(1000)$ ist, also steht da:

$$2 \cdot \log(1000) = \log(1000^2)$$

Und das ist eine superpraktische Rechenregel; *man kann die Hochzahl einfach aus dem Logarithmus „vornedran ziehen"*! Und das machen wir uns in unserer Aufgabe zu Nutze:

STATION 6:

Ein Patient bekommt von einer Ärztin zu diagnostischen Zwecken eine ${}^{131}_{53}\mathrm{I}$ -Infusion verabreicht. Dieses Iod hat eine Halbwertszeit (HWZ) von 8 Tagen (8d). Ermittele, nach welcher Zeit nur noch 1% des anfangs vorhandenen ${}^{131}_{53}\mathrm{I}$ übrig ist.

Wir haben uns überlegt, dass wir von 1000 mg ausgehen. Die Menge soll auf ein Hunderstel abnehmen (also 10 mg); wir überschlagen mal; nach 6 HWZ ist nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ vorhanden, was $\frac{1000}{64}$ mg (=15,625 mg) entspricht. Nach 7 HWZ ist nur noch $\frac{1}{128}$ der ursprünglichen Menge, 7,8125 mg, vorhanden. Also liegt die „Wartezeit" zwischen 6 bzw. 7 HWZ (=48…56) Tagen. Die Gleichung, die wir zu lösen haben, ist folgende:

$$1000\,mg \cdot (\frac{1}{2})^x = 1\% \cdot 1000\,mg = 10\,mg$$

Dabei ist das x in HWZ einzusetzen!
Wir teilen erst einmal durch 1000 mg und jetzt steht dies da:

$$(\frac{1}{2})^x = 0{,}01\ (= 10^{-2})$$

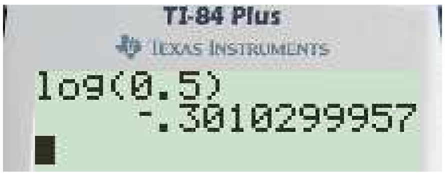
Ohne Logarithmus geht hier nichts. Mit ihm sieht es so aus: Der Logarithmus der rechten Seite ist einfach; denn man muss 10 hoch -2 nehmen, um auf 10^{-2} zu kommen (siehe Station 2)!

$$\log\,[(\frac{1}{2})^x] = \log[10^{-2}] = -2$$

Die linke Seite ist komplizierter; im Logarithmus steht eine Hochzahl. Diese dürfen wir nach vorne ziehen (siehe Station 5) und so erhalten wir:

$$x \cdot \log\left[\frac{1}{2}\right] = -2 \qquad \text{oder nach x aufgelöst:} \qquad x = \frac{-2}{\log\left[\frac{1}{2}\right]}$$

Im GTR können wir herausfinden, was $\log\left[\frac{1}{2}\right]$ genau ist. Es ist die Hochzahl, mit der wir 10 hochnehmen müssen, um 0.5 zu erhalten. Wir drücken auf „log" und dann geben wir „0.5" ein, machen die Klammer zu und ENTERn. Heraus kommt das:



Wir ersetzen unser log und erhalten für unser x:

$$x \approx \frac{-2}{-0{,}301} \approx 6{,}64$$

Dieses Ergebnis liegt wunderbar zwischen 6 und 7. Nach 6,64 mal 8 Tagen oder nach etwa 53d ist das radioaktive Iodnuklid auf 1% der anfänglichen Menge geschrumpft. Wir machen die Probe:

Stimmt! Bis auf Rundungsfehler haben wir 0,01, was ja 1% entspricht!