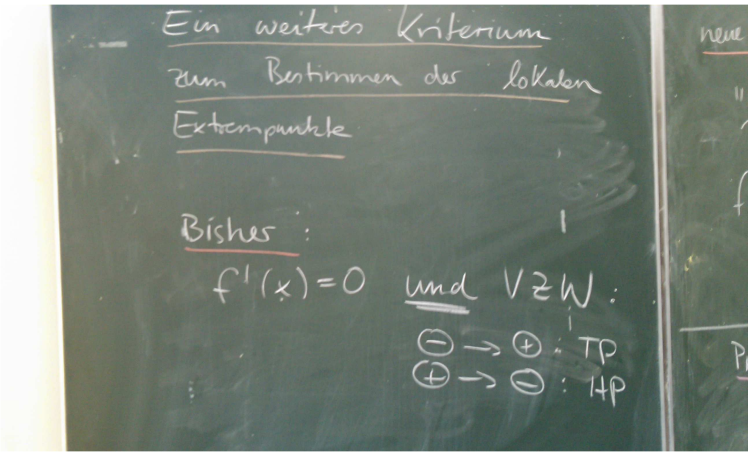
EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* # Doppelstunde vom 13.04.2010	f‘‘>0

Die erste Stunde nach den Osterferien war meiner Meinung nach von mir nicht gut durchgeplant. Das lag an der Prüfung am Freitag, was mir Leid tut. Nächste Woche wird es besser! Inhaltlich ging es darum, eine zweite Möglichkeit zu finden, wie man lokale Extremstellen (also die x-Werte für die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte) findet.

Auf der ersten Tafel siehst du noch einmal unser „altes“ (und absolut ausreichendes) Kriterium:



Dabei ist wichtig, dass man, nachdem man einmal abgeleitet hat, die Nullstellen dieser ersten Ableitung bestimmt (was du können solltest!). Diese Nullstellen sind dann Kandidaten für Extremstellen der Ausgangsfunktion f. Ist beispielsweise x=1,5 so ein Kandidat, also gilt f‘(1,5)=0, so muss man prüfen, ob ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet. Dies, indem man entweder f‘ skizziert oder aber indem man mit dem x-Wert um 1,5 „wackelt“ und einfach bspw. f‘(1,4) und f‘(1,6) testet. Man sollte nicht zu weit weggehen von der 1,5! (Wieso?)

Nun aber zum Inhalt der Stunde; eine zweite Variante ist die, nicht den VZW zu testen, sondern über die Krümmung der Kurve zu argumentieren. Die Kurve krümmt sich ja bei einem Hochpunkt anders als bei einem Tiefpunkt und wiederum anders als bei einem Sattelpunkt (den wir meistens gar nicht finden wollen). Anschaulich macht die Funktion in einem Hochpunkt eine Rechtskurve (wenn man mit wachsenden x-Werten „fährt“) bzw. eine Linkskurve, wenn man einen Tiefpunkt durchläuft.

Die Tangente klappt in einem Hochpunkt von positiver auf negative Steigung um. Das heißt, ihre Änderungsrate ist negativ. Die Änderungsrate entspricht der ersten Ableitung. **Nun ist aber die Steigung Ausgangspunkt des Ableitens!** Dies bedeutet, dass wir f‘ erneut ableiten müssen! So erhalten wir f‘‘ (man macht je Ableitung einen Strich, was natürlich irgendwann nervt wie bspw. bei f‘‘‘‘‘‘‘‘ oder so…). Die zweite Ableitung von f gibt an, wie sich die Kurve krümmt.

f Funktion, weist jedem x ein y zu und „spuckt“ Punkte P(x|y) aus.

f‘ Ableitungsfunktion, weist jedem x eine Steigung m=f‘(x) zu. Nullstellen von f‘ können Extremstellen der Funktion f sein.

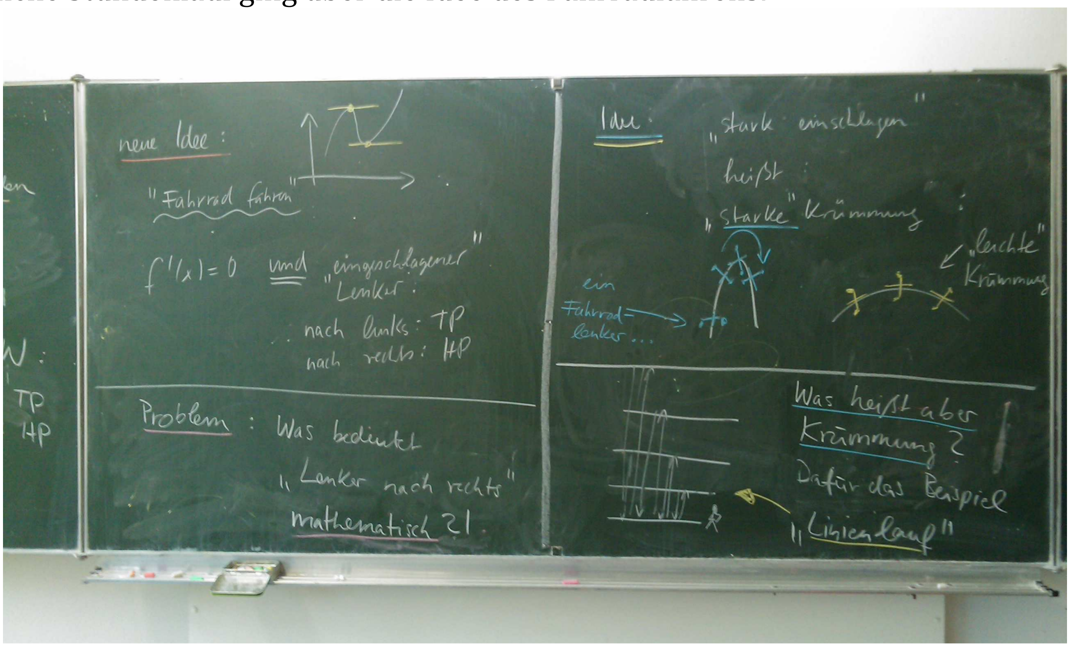
f‘‘ Ableitungsfunktion der Ableitungsfunktion, kurz: „Zweite Ableitung“. Sie hat eine Anschauung und entspricht der Krümmung von f. f‘‘(x) ist die Krümmung der Kurve in einem Punkt P(x|y) der Ausgangsfunktion. Große Werte von f‘‘ bedeuten eine starke Krümmung, kleine Werte eine schwache. Ist $f''(x)=0$, so ist die Funktion für x gar nicht gekrümmt, was einem geraden Stück entspricht. Noch ein Zusatz: Man spricht von einer positiven Krümmung, wenn $f''>0$ gilt. Das enspricht einer Linkskurve. Daher noch unser neues Kriterium „in kurz“:

Alternatives Kriterium zum Bestimmen von lokalen Extremstellen
Setze $f'(x)=0$. Für die Kandidaten muss dann **(a)** $f''(x)>0$ gelten, dann ist es ein lokales Minimum von f oder **(b)** $f''(x)<0$, so ist es ein lokales Maximum von f. *Bei $f''(x)=0$ gibt es ein Problem!*

Beispiel 1
Wir wählen $f(x)=3x+4$. $f'(x)=3$. $f'(x)=0$ hat keine Lösung, also gibt es keine lokalen Extremstellen. Hier wäre übrigens $f''(x)=0$. Es gibt keine Krümmung der Ausgangsfunktion, was bei einer geraden Strecke auch Sinn macht!

Beispiel 2
Wir wählen $f(x)=x^2-4$. $f'(x)=2x$. Wir finden als Kandidat für Extremstellen von f die Lösung $x=0$. Mit VZW sehen wir, dass es von – nach + geht, also ist es ein Tiefpunkt (klar!). Aber auch über f'' finden wir sofort heraus, dass es ein Tiefpunkt sein muss, denn $f''(x)=2 > 0$. Also Linkskurve, also Tiefpunkt.

Der eigentliche Stundenlauf ging über die Idee des Fahrradfahrens:



Und wir haben uns den Begriff der Krümmung etwas umständlich erarbeitet. Es gab zwei Beispiele aus der Physik bzw. dem Sport; einmal einen Hundermeterhürdenlauf und zum Zweiten einen Linienlauf. Anhand der $s(t)$-, $v(t)$- und $a(t)$–Diagramme konnten wir verstehen, dass Krümmung und f'' sehr eng zusammenhängen.

Merke (für Kursstufe wichtig!):

- $s(t)$ Strecke s in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit t. Oft wird s in Metern und t in Sekunden angegeben.
- $v(t)$ Geschwindigkeit (hier in „Metern pro Sekunde“, kurz m/s) in Abhängigkeit von t. Es gilt ganz einfach: $s'(t)=v(t)$.
- $a(t)$ Beschleunigung (hier in „Metern pro Sekunde“ pro Sekunde, also „Meter pro Sekunde^2“, kurz m/s^2). Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, sie gibt ja an, wie sich die Geschwindigkeit ändert. Hier also eine weitere Anschauung; **die zweite Ableitung kann**

man als Beschleunigung auffassen. Wobei das nicht immer direkt Sinn macht, Krümmung ist denke ich besser.

Unten noch einmal das v(t)-Diagramm zum Linienlauf, in orange sind die Wegpunkte 0 Meter, 3 Meter, 6 Meter und 9 Meter eingetragen. Denk dieses Diagramm noch einmal in Ruhe durch!