El 10c M 2009-10	*AUFGABE AUS DER VORBEREITUNGSSTUNDE* Lösung	(x-1)²

$$gegeben: \qquad f(\blacksquare) = (\blacksquare - 1)^2$$

$$gesucht: \qquad f'(\blacksquare) = \ ?$$

$$Ansatz: \quad m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Heißt, wir müssen für das ■ (im Unterricht die gelbe Fläche, hatte ich hier nicht) einmal (x+h) und einmal x einsetzen! Tun wir das!

$$aus\ Ansatz: \quad m = \frac{((x+h)-1)^2 - (x-1)^2}{h}$$

$$= \frac{\big((x+h)-1\big)\big((x+h)-1\big) - (x^2 - 2x + 1)}{h} \qquad (*)$$

Den hinteren Teil, (x-1)², wusste ich durch die binomischen Formeln, notfalls muss man das auch ausmultiplizieren. Das mache ich jetzt auch mit dem ersten Summanden, also ((x+h)-1)²:

$$Nebenrechnung: \big((x+h)-1\big)^2 = \big((x+h)-1\big)\big((x+h)-1\big)$$
$$= (x+h-1)(x+h-1) = x \cdot (x+h-1) + h \cdot (x+h-1) - 1 \cdot (x+h-1)$$

Die untere Zeile entsteht zum einen dadurch, dass die Klammer in der Klammer überflüssig war und zum anderen dadurch, dass jeder einzelne Summand der ersten Klammer (also x,h,-1) mit der zweiten Klammer multipliziert werden muss. Das wird jetzt gemacht und alles zusammen verrechnet:

$$x \cdot (x+h-1) + h \cdot (x+h-1) - 1 \cdot (x+h-1) = (x^2 + xh - x) + (hx + h^2 - h) - (x+h-1)$$
$$= x^2 + xh - x + xh + h^2 - h - x - h + 1$$

Hierbei aufpassen, rechne Schritt für Schritt, keine Eile, nicht zweidrei Schritte auf einmal! Ich habe erste einmal x,h und -1 mit der Klammer multipliziert und danach geschaut, ob ich irgendwo Vorzeichen wegen einer Minusklammer rumdrehen musste, genauso, wie ich aus hx einfach mal xh gemacht habe, weil ich das übersichtlicher finde. Jetzt vereinfache ich noch:

$$x^2 + xh - x + xh + h^2 - h - x - h + 1 = x^2 + 2xh - 2x + h^2 - 2h + 1 \qquad (**)$$

Das ist der Ausdruck für (x+h-1)². Zurück zur eigentlichen Rechnung (*), da setze ich mein Ergebnis ein:

$$m = \frac{(x^2 + 2xh - 2x + h^2 - 2h + 1) - (x^2 - 2x + 1)}{h} = \frac{x^2 + 2xh - 2x + h^2 - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1}{h}$$

Hier habe ich also unser Ergebnis (**) in (*) eingesetzt und dann die hintere Minusklammer „gekillt". Jetzt kann man ganz viel wegkürzen und es bleibt stehen:

$$m = \frac{2xh + h^2 - 2h}{h} = 2x + h - 2 \qquad (***)$$

Juhu! Für h=0 wird unser m ja zur Steigung IM Punkt selbst, also zur Ableitung f‘ und die wäre damit 2x-2, was stimmt, denn:

Probe mit unseren Rechenregeln:

$$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \text{ und aus } x^2 \text{ wird } 2x \text{ bzw. aus } -2x \text{ einfach } -2 \text{ und aus der 1 wird eine } 0.$$