EI 10c M 2009-10	MATHEMATIK # 1. Klassenarbeit Lösungsvorschlag	1

Vergleiche deine Lösungen mit diesem Lösungsvorschlag. Helft euch gegenseitig bei Fragen oder fragt mich direkt!

AUFGABE 1 — 7 PUNKTE

Die Gerade g geht durch den Punkt A(-2|-4) und hat die Steigung 4.

Also ist für unsere allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ **das** $m = 4$ **!**

a) Berechne dazu die allgemeine Geradengleichung der Geraden g.

Wir wissen schon $y = 4 \cdot x + c$ **. Aber wir haben noch einen Punkt A, der auf der Geraden liegt. Diesen Punkt A setzen wir in die eben aufgestellte Gleichung ein (Stichwort „Punktprobe“!) und so ergibt sich:**

$$-4 = 4 \cdot (-2) + c \quad \Leftrightarrow \quad -4 = -8 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 4$$

In welchem Punkt schneidet diese Gerade die y-Achse?

Das c ist doch der sogenannte y-Achsenabschnitt! Also schneidet die Gerade die y-Achse (nicht die x-Achse!) im Punkt S(0|4). Rechnerisch könnte man auch einfach x=0 in unsere fertige Geradengleichung y=4x+4 einsetzen und erhält so ebenfalls den y-Wert 4:

$$y = 4 \cdot 0 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4$$

Zeige anschließend, dass der Punkt B(0.5|6) auf der Geraden g liegt.

Hier müssen wir erneut eine Punktprobe machen. Für x=0.5 soll angeblich y=6 sein. Probieren wir das aus:

$$y = 4 \cdot 0.5 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 6$$

Stimmt! Damit liegt B auf der Geraden g.

b) Bestimme die Gleichung der zu g parallelen Geraden h, die durch den Punkt C(4|0) geht.

Sind zwei Geraden parallel, so haben sie dieselbe Steigung m. Das heisst aber, dass die Gerade von der Form $y = 4 \cdot x + c$ **ist mit noch unbekanntem c. Dieses finden wir wieder durch eine Punktprobe, denn C soll ja auf der Geraden liegen!**

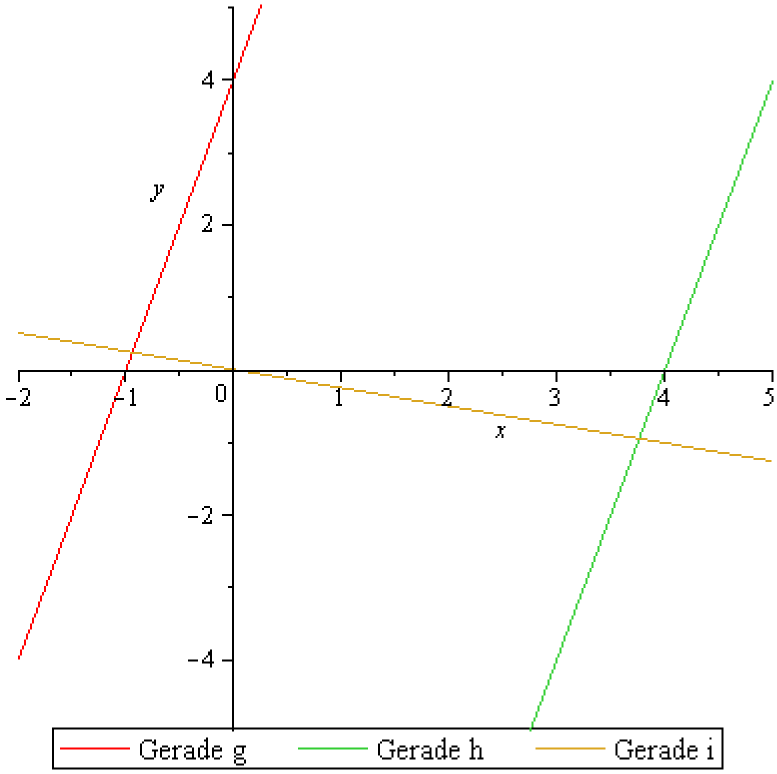
$$0 = 4 \cdot 4 + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 16 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -16$$

Damit haben wir unsere Gerade h bestimmt zu: $y = 4 \cdot x - 16$ **.**

c) Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die x-Achse? Und unter welchem Winkel schneidet die Gerade h die x-Achse?

Den Winkel finden wir mit Hilfe unseres GTR. Es gilt die Formel $\tan(\alpha) = m$ **. Setzt man m=4, dann findet man über <2nd> und <tan>** $\alpha \approx 76°$**. Da beide Geraden dieselbe Steigung haben, schneiden sie die x-Achse im selben Winkel. Sie sind ja parallel.**

d) Die Gerade i erfüllt die Gleichung $y = -\frac{1}{4} \cdot x$.
Zeichne die Geraden g, h und i in ein geeignetes Schaubild.



Weise nach, dass sich g und i senkrecht schneiden, sprich, dass der gemeinsame Schnittwinkel 90° beträgt.

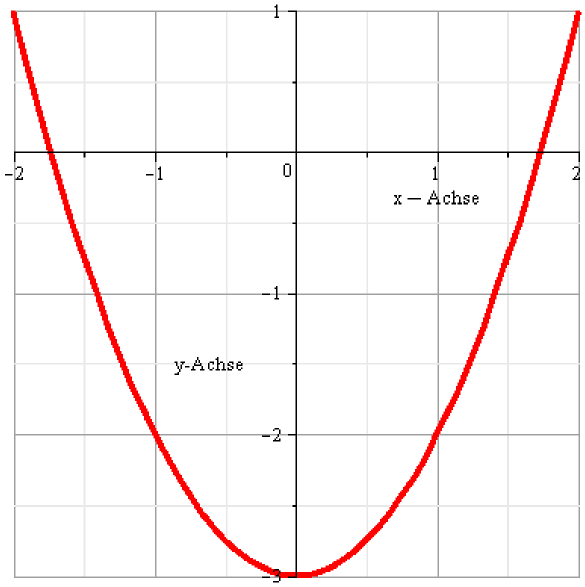
Entweder, man weiß schon, dass zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, wenn das Produkt ihrer Steigungen genau -1 ergibt, oder man rechnet den Schnittwinkel von i mit der x-Achse aus. Es ergibt sich dann mit dem GTR:

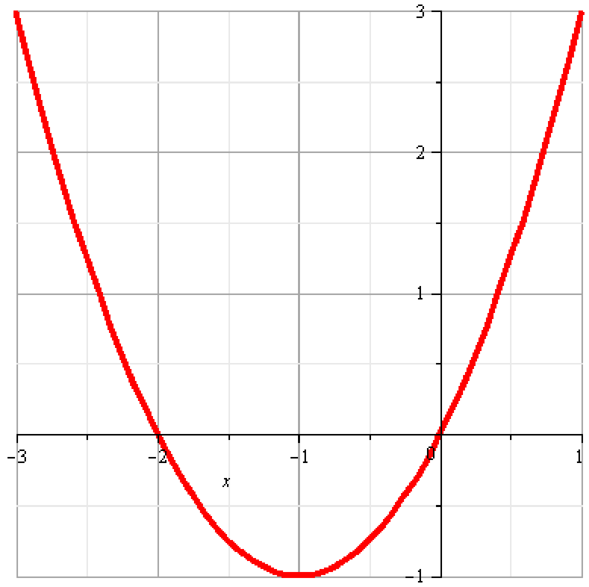
$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx -14°$$

Es ist ja 14+76=90. Nun haben wir einmal einen Winkel von 76° und einen zweiten, der vom Betrag 14° groß ist. Da sich wie man in der Zeichnung sieht, die beiden Beträge addieren, kommt auch wirklich 90° raus. Falls man rundet, kommt man nicht ganz auf 90°, trotzdem sind es natürlich 90°.

AUFGABE 2 **4 PUNKTE**

Bestimme die Gleichungen der folgenden Schaubilder von Normalparabeln. Notiere dazu jeweils die passende allgemeine Parabelgleichung und die zugehörige faktorisierte Form.





Wir lesen am linken Schaubild den Scheitelpunkt ab. Er ist S(0|-3). Es handelt sich laut Text um eine Normalparabel. Also setzen wir in die zugehörige Scheitelpunktform ein und erhalten:

$$y = (x-0)^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 - 3$$

Das ist auch schon die ausmultiplizierte Form mit a = 1 (klar, Normalparabel), b = 0 und c = -3. Die faktorisierte Form finden wir, wenn wir y=0 setzen:

$$0 = x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$$

So kennen wir nämlich die Nullstellen und dann ist es einfach:

$$y = \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot (x + \sqrt{3})$$

Bei der Parabel im rechten Schaubild geht alles völlig analog. Doch kann man hier noch einfacher direkt die Nullstellen s = 0 und t = -2 ablesen! Also ist die Parabelgleichung diese:

$$y = (x-0) \cdot \big(x - (-2)\big) = x \cdot (x+2)$$

Und multipliziert man hier aus, finde man sofort a = 1, b = 2, c = 0:

$$y = x^2 + 2x$$

AUFGABE 3 **4 PUNKTE**

Gegeben sind folgende drei Punkte: P(-2|2), Q(1|3) und R(3|6). Berechne die Gleichung der durch diese drei Punkte verlaufende Parabel **per Hand (ohne GTR)**. Achte dabei auf eine saubere und übersichtliche Darstellung des Rechengangs!

Diese Aufgabe ist nicht einfach in einer Arbeit, weil sie viel Zeit kosten kann. Daher sollte man solche „großen Aufgaben" erst zuletzt bearbeiten. Im Folgenden ein möglicher Lösungsweg mit „guter Notation":

$$\text{Ansatz:} \quad \mathbf{y = ax^2 + bx + c} \quad (*) \quad \text{mit unbekanntem a, b, c.}$$

$$\text{Punktprobe: P in } (*)\text{: } 2 = a(-2)^2 + b(-2) + c \Leftrightarrow \mathbf{2 = 4a - 2b + c} \ (\mathbf{1})$$

$$\text{Punktprobe: Q in } (*)\text{: } \mathbf{3 = a + b + c} \ (\mathbf{2})$$

$$\text{Punktprobe: R in } (*)\text{: } 6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \Leftrightarrow \mathbf{6 = 9a + 3b + c} \ (\mathbf{3})$$

$$\text{Umformen von (2) zu } \mathbf{a = 3 - c - b} \ (\mathbf{4})$$

$$\text{(4) in (1): } 2 = 4(3 - c - b) - 2b + c \Leftrightarrow \mathbf{\frac{10}{6} - \frac{1}{2} \cdot c = b} \ (\mathbf{5})$$

$$\text{(4) in (3): } \mathbf{6 = 9(3 - c - b) + 3b + c} \Leftrightarrow 6 = 27 - 9c - 9b + 3b + c$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{6 = 27 - 8c - 6b} \ (\mathbf{6})$$

$$\text{(5) in (6): } 6 = 27 - 8c - 6\left(\frac{10}{6} - \frac{1}{2} \cdot c\right) = 27 - 8c - 10 + 3c = 17 - 5c$$

$$\Leftrightarrow 6 = 17 - 5c \Leftrightarrow -11 = -5c \Leftrightarrow c = \frac{11}{5} \ (\mathbf{7})$$

$$\text{(7) in (5): } \frac{10}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5} = b \Leftrightarrow b = \frac{17}{30} \ (\mathbf{8})$$

$$\text{(7) und (8) in (4): } a = 3 - \frac{11}{5} - \frac{17}{30} \Leftrightarrow a = \frac{7}{30} \ (\mathbf{9})$$

$$\text{(7), (8) und (9) in } (*)\text{: } \quad y = \frac{7}{30}x^2 + \frac{17}{30}x + \frac{11}{5}.$$

Gerne kann man noch die Werte für a, b und c ausrechnen, aber nötig ist es nicht. Überprüfen kann man das Ergebnis noch mit dem GTR.

AUFGABE 4 — 5 PUNKTE

Der Sprung eines Flohs lässt sich gut mittels einer Parabel nähern:

Die zugehörige Gleichung lautet: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$.
Dabei ist y die Sprunghöhe in cm und x die Sprungweite in cm.

a) Wie weit springt der Floh? Und wie groß ist seine maximale Sprunghöhe?

b) Nach welcher Weite hat er die Höhe von 7 cm erreicht?

Zu a): Der Floh springt von Nullstelle zu Nullstelle. Diese findet man entweder mit dem GTR über <Trace> oder über <Intersection> oder per Hand über die abc-Formel.
So oder so, es ergibt sich x1=0 (cm) und x2=20 (cm).

Damit springt der Floh 20 cm weit.

Den höchsten Punkt erreicht er im Scheitelpunkt. Der liegt bei x=10, denn das ist genau zwischen den beiden Nullstellen (Symmetrie der Parabel). Die Sprunghöhe findet sich über $y = -\frac{1}{10} \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = -10 + 20 = 10$ **.**

Der Floh springt maximal 10 cm hoch.

Zu b): Hier muss es zwei Lösungen geben! Wieder wegen der Symmetrie. Zu Lösen ist diese Gleichung:

$$7 = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

Man könnte auch im GTR die Gerade y=7 einzeichnen und wieder über <Trace> die Schnittpunkte mit der Parabel bestimmen. Ansonsten bleibt die abc-Formel, nachdem man die 7 auf die rechte Seite gebracht hat:

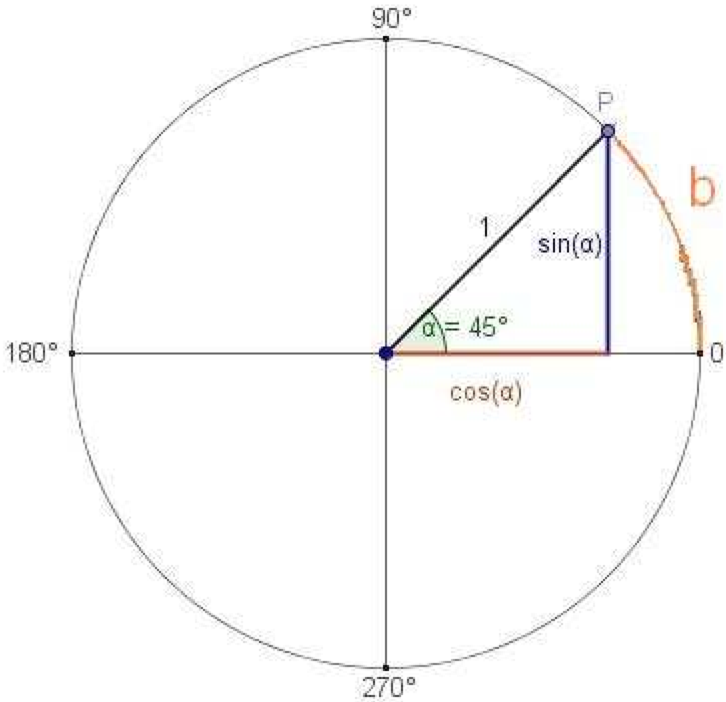
$$0 = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7$$

Es ergeben sich die zwei Weiten von etwa 4,5 cm und 15,4 cm, bei denen der Flo die Höhe von 7 cm erreicht.

AUFGABE 5 **4 PUNKTE**

Skizziere den Einheitskreis und zeichne die beiden trigonometrischen Funktionen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ zu einem Winkel α ein. Zeichne anschließend die zum Winkel α gehörende Bogenlänge ein und leite eine Umrechnungsformel von Gradmaß und Bogenmaß mit Hilfe der Winkel 180°, 90° und 45° her.

Eine Skizze genügt natürlich, hier eine genauere Zeichnung:



Nun kann man mit dem Dreisatz argumentieren:

Wir wollen, dass α und b einander entsprechen. Und zwar soll sich α zum „Vollwinkel" 360° genauso verhalten wie der Bogen b zum gesamten Umfang, 2π!

In einer Formel ausgedrückt also:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}$$

Man sieht an der Formel, dass beispielsweise für 180° der Bogen genau der halbe Einheitskreisumfang, also π, ist und für den Viertelkreis der Winkel auch 90° ist. Ebenso der Achtelkreis hat einerseits 45° als Winkel und π/4 als Bogen.